

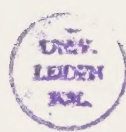
GALAXIENENTSTEHUNG — MODELLE FÜR DEN GRAVITATIONSKOLLAPS  
IM NICHTLINEAREN BEREICH

Dissertation  
der Fakultät für Physik  
der  
Ludwig-Maximilians-Universität  
München

vorgelegt von

Günter Götz  
aus Weiden

München den 10.12.1987



**GALAXIENENTSTEHUNG — MODELLE FÜR DEN GRAVITATIONSKOLLAPS  
IM NICHTLINEAREN BEREICH**

Dissertation  
der Fakultät für Physik  
der  
Ludwig-Maximilians-Universität  
München

vorgelegt von

Günter Götz  
aus Weiden

München den 10.12.1987

1. Gutachter: Prof. G. Börner

2. Gutachter: Prof. R.-P. Kudritzki

Tag der mündlichen Prüfung: 25.4.1988

## ZUSAMMENFASSUNG

Im Standardmodell der Kosmologie, dem heißen Urknallmodell, soll die Bildung der Galaxien erklärt werden aus dem Anwachsen und schließlichem Gravitationskollaps anfänglich kleiner Dichtestörungen eines homogenen, isotropen Friedmann-Lemaître Universums. Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zu diesem gesamten Problemkreis dar. Das spezielle Ziel war ein besseres Verständnis für den nichtlinearen Bereich der zeitlichen Entwicklung von Dichtestörungen zu gewinnen. Der Weg der hier eingeschlagen wurde, geht aus von der Newtonschen Hydrodynamik selbstgravitierender Systeme. Für einfache Modellfälle wurden analytische Lösungen konstruiert, die es aber erlauben typische nichtlineare Aspekte zu untersuchen.

Abschnitt I. bietet als Einführung einen summarischen Überblick über verschiedene Modellvorstellungen der Galaxienentstehung sowie deren mathematische Beschreibung. Im Hauptteil II. werden exakte Lösungen für die Spätphase des hochgradig anisotropen Gravitationskollaps hergeleitet, diskutiert, und soweit möglich, interpretiert. Zunächst wird in Abschnitt II.2. ein Modell diskutiert, das in etwa der sogenannten "pancake"-Theorie für die Strukturbildung auf großen räumlichen Skalen entspricht: Unter den Annahmen, daß der Gasdruck verschwindet ( $p = 0$ ) und zwei der drei Eigenwerte des Expansions-tensors gleich Null sind, läßt sich die allgemeine Lösung der Euler-Poisson Gleichungen ableiten. Dies ist eine Idealisierung einer lokal extrem anisotropen Bewegung. Die Lösung hat keine Symmetrie. Die Niveauflächen der Dichteverteilung werden untersucht, ebenso die Flächen, auf denen der Eigenvektor zum nicht-verschwindenden Eigenwert senkrecht steht. Die Niveauflächen der Dichte haben stets negative Gauss-Krümmung.

In Abschnitt II.3. wird die Existenz von Solitonen, das heißt stabiler spezieller Dichteinhomogenitäten, in einer selbstgravitierenden Flüssigkeit mit isothermer Zustandsgleichung gezeigt ( $p = \gamma\rho$ ,  $\gamma = \text{const.}$ ). Für den eindimensionalen Fall (ebene Symmetrie) läßt sich das Gleichungssystem reduzieren auf eine sine-Gordon Gleichung, die durch die Methode des "inverse scattering" gelöst werden kann. Jede beliebige Anfangsbedingung einer sine-Gordon Gleichung entwickelt sich asymptotisch in eine Superposition von  $N$  Solitonen, in der nur die Anzahl und die Amplitudenverteilung durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Für den Fall von Störungen mit Unterschallgeschwindigkeit überträgt sich dieses Verhalten auf das Gravitationssystem. Alle Lösungen, die sich aus den Ein- und Zwei-Soliton Lösungen der sine-Gordon Gleichung erzeugen lassen, werden in Abschnitt II.3.3. explizit angegeben. Aus der trivialen Lösung und der Ein-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung lassen sich sowohl ein einzelner Puls erzeugen, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, als auch eine homogene Lösung, für die die Dichte nur eine Funktion der Zeit ist. Die Ein-Soliton Lösung zeigt eine marginale Stabilität gegen lineare

Störungen. Die Soliton-Soliton Konfiguration produziert eine Lösung des Gravitations-systems, die die elastische Wechselwirkung zweier lokaler Verdichtungen beschreibt. Die beiden Pulse haben eine zeitlich veränderliche Amplitude, die asymptotisch einen konstanten, nicht-verschwindenden Wert annimmt. Durch eine spezielle Austauschsymmetrie in der Bäcklundtransformation der sine-Gordon Gleichung läßt sich aus der Soliton-Soliton Lösung noch eine zweite Lösung der Newtonschen Gleichungen erzeugen, die einen einzelnen Puls beschreibt, der sich auf einem homogenen Hintergrund bewegt. Das besondere Merkmal ist, daß die Dichte in einer endlichen Zeit unendlich groß wird, was man normalerweise nur bei den Staub-Lösungen kennt. Aus der "breather" Lösung der sine-Gordon Gleichung (gebundener Zustand zweier Solitonen) ermittelt man eine Lösung, die zwei symmetrisch einlaufende Wellen beschreibt, die auf eine ruhende, zentrale Verdichtung kollabieren. Die Maxima der Dichteverteilung sind jeweils von Diskontinuitäten getrennt. Bedeutsam für die Physik selbstgravitierender Systeme sind die typisch nichtlinearen Relationen zwischen Amplitude und räumlicher Breite der Solitonen und die Phasenkopplung der Fouriermoden einer beliebigen Anfangsbedingung, die durch das asymptotische Verhalten hin zu einer Überlagerung von Solitonen für Unterschallströmungen zum Ausdruck kommt.

Abschnitt 4 enthält ein Modell für den Gravitationskollaps in zwei Dimensionen (Translationsinvarianz in einer räumlichen Richtung) mit Gasdruck. Die Rechtfertigung für diese Einschränkung auf zwei Dimensionen kommt daher, daß man im Rahmen der Theorien der Strukturbildung allgemein an hochgradig anisotropen Bewegungen interessiert ist, da den einfach lösbaren Situationen, wie sphärische Symmetrie sicher keine generische Bedeutung zukommt. Außerdem können längliche, filamentartige Verdichtungen als Resultat — neben flachen, "pancake"-artigen Objekten — der druckfreien Phase des Kollaps entstehen. Lösungen mit Translationsinvarianz in einer Richtung liefern eine idealisierte Beschreibung von Konfigurationen, bei denen die Variation der physikalischen Größen in zwei Richtungen groß sind im Vergleich zu den typischen Änderungen in der dritten Richtung. In 2-D kann man die der Ein-Soliton Lösung in 1-D entsprechende Lösung ebenso explizit konstruieren. Durch eine konforme, zeitabhängige Transformation kann man eine Klasse von Lösungen erzeugen mit komplizierterer Zeitabhängigkeit und nicht-konstantem Geschwindigkeitsfeld. Eine besondere Eigenschaft dieser Modelle ist die Existenz von in der Zeit exponentiell anwachsenden Instabilitäten auf räumlichen Hyperflächen, deren Gestalt bestimmt ist durch die Randbedingungen für die Dichteverteilung. Diese Lösungen kann man als Modell für einen asymmetrischen Gravitationskollaps ansehen. Bemerkenswert ist, daß auch bei nicht-verschwindendem Gasdruck der Kollaps auf flache, streng lokalisierte Strukturen möglich ist, was zunächst nur für druckfreie Materie gezeigt wurde.

In Abschnitt 5 wird ein dreidimensionales Modell diskutiert, das das dreidimensionale Analogon zur Ein-Soliton Lösung in 1-D darstellt. Die Dichteverteilung stellt eine hy-

drostatische Gleichgewichtskonfiguration dar, die keine Symmetrie besitzt und eine frei wählbare Funktion enthält, die durch Vorgabe von Randbedingungen bestimmt wird. Gleichgewichtskonfigurationen spielen eine wichtige Rolle als die virialisierten Endzustände eines Gravitationskollaps. Für spezielle Beispiele kann man zeigen, daß diese Lösungsklasse Dichteverteilungen zuläßt, deren Niveauflächen mehrfach zusammenhängend sind.

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Untersuchungen selbstgravitierender Flüssigkeiten nicht nur in der Theorie der Galaxienentstehung anwendbar sind, sondern auch auf die Entwicklung von Systemen auf kleineren Skalen, wie zum Beispiel das Problem der Fragmentierung einer Gaswolke als Vorstufe zur Sternentstehung oder die Dynamik des interstellaren Gases, für das die isotherme Zustandsgleichung in einem großen Dichtebereich eine realistische Annahme ist.



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41555422\\_0026](https://archive.org/details/IA41555422_0026)

# INHALT

## I. Einleitung

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 1. Szenarien der Galaxienentstehung       | 1  |
| 1.1. Baryon-dominiertes Modell            | 4  |
| 1.1.1. Adiabatisches Fluktuationsspektrum | 4  |
| 1.1.2. Isothermes Fluktuationsspektrum    | 5  |
| 1.2. Szenarien mit dunkler Materie (DM)   | 7  |
| 1.2.1. Heiße dunkle Materie               | 7  |
| 1.2.2. Kalte dunkle Materie               | 9  |
| 2. Mathematische Beschreibung             | 11 |

## II. Modelle für den nichtlinearen Bereich des Gravitationskollaps und nichtlineare Phänomene in selbst-gravitierenden Flüssigkeiten

|                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Übersicht dieses Kapitels                                                       | 19  |
| 2. Ein exaktes Modell für den "pancake"-Kollaps                                    | 23  |
| 2.1. Die Lösung                                                                    | 23  |
| 2.2. Niveaulächen, Flächen maximaler Kontraktion                                   | 37  |
| 3. Solitonen in selbstgravitierender Materie                                       | 42  |
| 3.1. Nichtlineare, ebene Wellen und die sine-Gordon Gleichung                      | 44  |
| 3.2. Asymptotik                                                                    | 52  |
| 3.3. Partikuläre Lösungen                                                          | 55  |
| 3.3.1. Die Ein-Soliton Lösung                                                      | 56  |
| 3.3.2. Der homogene Hintergrund                                                    | 59  |
| 3.3.3. Die Zwei-Soliton Lösung                                                     | 61  |
| 3.3.4. Puls auf einem homogenen Hintergrund                                        | 65  |
| 3.3.5. Breather I                                                                  | 68  |
| 3.3.6. Breather II                                                                 | 73  |
| 4. Ein Modell für den Gravitationskollaps mit Druck in zwei räumlichen Dimensionen | 76  |
| 4.1. Eine Lösung                                                                   | 78  |
| 4.2. Ein Beispiel                                                                  | 86  |
| 4.3. Eigenschaften des Modells                                                     | 89  |
| 5. Dreidimensionale Gleichgewichtskonfigurationen                                  | 95  |
| 5.1. Ein Gleichgewichtsmodell ohne Symmetrie                                       | 97  |
| 5.2. Niveaulächen der Dichte                                                       | 102 |

## III. Schlußbemerkungen

## IV. Abbildungen

## V. Literatur



# I. EINLEITUNG

## 1. Szenarien der Galaxienentstehung

Eines der wichtigsten, ungelösten Probleme der Kosmologie ist die Frage nach der Entstehung der Strukturen im heute beobachteten Universum (Übersichtsartikel: Jones 1976, Gott 1977, Efstathiou/Silk 1983, Zeldovich 1984, Shandarin/Doroshkevich/Zeldovich 1983, Barrow 1980, Jones/Palmer 1985, Jones 1980, Silk 1980, Hogan 1985, Doroshkevich/Shandarin/Zeldovich 1982, Beitrag von S.D. White in: Faber 1987, S. 234). Einerseits zeigen die Beobachtungen ein hochgradig isotrop verteiltes Photonengas (3-K-Hintergrund, Davies 1987), andererseits ist die baryonische Materie in Objekte konzentriert, bei denen der Grad an Inhomogenität mit abnehmender Skalenlänge zunimmt (der Grad an Inhomogenität oder der Dichtekontrast  $\delta$  ist definiert als die relative Abweichung der wirklichen Dichte  $\rho$  von der Dichte des homogenen Hintergrunds  $\rho_0$ :  $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ ). Im Rahmen der "big-bang"-Kosmologie (Weinberg 1972) versucht man diese Strukturierung zu deuten als Folge gravitativer Instabilitäten (Jeans-Instabilität, siehe Lifshitz/Khalatnikov 1964, Peebles 1980, Zeldovich/Novikov 1983, Baptista/Gerbál 1980) eines homogenen und isotropen Hintergrundmodells (Friedmann-Robertson-Walker-Universum). Kleine Störungen in der Materiedichte dieses Hintergrunds sollen dabei im Zeitraum zwischen der Entkopplung der Baryonen von der Strahlung ( $z = 1000$ ,  $z$  bedeutet die Rotverschiebung) und  $z = 4$  (fernste beobachtete Quasare) so weit angewachsen sein, daß man unter Berücksichtigung physikalischer Prozesse auf kleinen Skalen (Fragmentation, Gaskühlungsmechanismen, Sternentstehung) die heute beobachtete großräumige Verteilung der Galaxien verstehen kann (Oort 1970/1983).

Unter diesen Voraussetzungen zerfällt das Problem in zwei Teile: Einerseits gilt es die *zeitliche Entwicklung* von Dichteinhomogenitäten im Rahmen der Gravitationstheorie zu verstehen und andererseits eine Erklärung für das *anfängliche Spektrum der Fluktuationen* auf einem homogenen Hintergrund zu finden. Der Zeitpunkt, zu dem man die Anfangsbedingungen setzt, ist zunächst unbestimmt, keinesfalls aber vor der Planck-Zeit, die den Gültigkeitsbereich der klassischen Gravitationstheorie begrenzt.

Die heutigen Beobachtungen lassen keinen eindeutigen Rückschluß auf Anfangsbedingungen und Zeitentwicklung zu. Man kann nur verschiedene Modelle konstruieren und deren Vorhersagen mit den Beobachtungen vergleichen. Wesentliche Bindeglieder zwischen Beobachtung und Modell sind die Isotropie der 3-K Strahlung zur Zeit der Rekombination, die Restriktionen für den maximalen Dichtekontrast liefert (Kaiser 1982, Silk 1974), die Zweipunktkorrelationsfunktion (Definition siehe Peebles 1980; Dekel 1984, Dekel/Aarseth 1984) der Verteilung von Galaxien und Galaxienhaufen und deren Geschwindigkeitsdispersion (Saslaw/Aarseth 1982, Szalay/Silk 1983) und letztlich der rein visuelle Eindruck,

gewonnen aus der vollen dreidimensionalen Vermessung des Universums ("deep redshift surveys"). Es gibt aber kein eindeutiges, quantitatives Maß mit dem sich weitere Feinheiten der räumlichen Materieverteilung, wie Filamentstrukturen, "voids" (Zeldovich/Shandarin 1982a, Zeldovich/Einasto/Shandarin 1982, Fry 1986) usf. beschreiben ließen. Ansätze zu einer solch quantitativen Beschreibung der Strukturen sind die Bestimmung einer fraktalen Dimension (Mandelbrot 1983) und die Analogien aus der Perkolationstheorie (Shandarin 1983).

Zur Erklärung der *Anfangsbedingungen* werden zumeist exotische Prozesse herangezogen, wie Quantenfluktuationen hypothetischer Skalarfelder im Rahmen des "inflationären Universums" (Beitrag von R. Brandenberger in: Faber 1987, Kripfganz/Perlt 1986, Frieman/Will 1982, Frieman/Turner 1984) oder topologische Defekte dieser Skalarfelder, die während eines Phasenübergangs erzeugt werden ("cosmic strings", Beitrag von A. Vilenkin in: Kolb et al. 1986, Seite 269). Durch primordiale Gravitationswellen erzeugte Fluktuationen werden von Starobinskii 1983 diskutiert, der Vorschlag Inhomogenitäten durch Phononen zu erzeugen, stammt von Lukash 1980 (auch Kompaneets/Lukash 1981). Carlitz/Frautschi/Nahm 1973 entwerfen eine Art "bootstrap"-Modell, nachdem anfängliche Dichteschwankungen durch gravitative Dynamik die Produktion neuer Inhomogenitäten triggern (siehe auch Carr/Silk 1983, Crawford/Schramm 1982). Allerdings hat es auch Ansätze zur Erklärung der Anfangsbedingungen im Rahmen der klassischen Thermodynamik gegeben, die jedoch nicht weiter verfolgt wurden (Bonnor 1956b/1957, Saslaw 1968/1969/1970). Dabei soll die Ursache für die spontane Erzeugung von Fluktuationen die Modifikation der Zustandsgleichung eines idealen Gases durch die langreichweitigen Gravitationskräfte sein, die zu nichtverschwindenden Korrelationen führen. Die Bedeutung von thermischen Instabilitäten für die Strukturbildung wird diskutiert in Kato/Nariai/Tomita 1967.

Die *Zeitentwicklung* von Inhomogenitäten läßt sich je nach deren Größe einteilen in eine Phase für die die lineare Störungstheorie eine gute Beschreibung liefert und eine Phase in der die Nichtlinearitäten der Gravitationstheorie eine entscheidende Rolle spielen. Die lineare Theorie ist bislang gut verstanden (Bardeen 1980, Brandenberger et al. 1983, Bonnor 1956a, Peebles 1980, Doroshkevich/Zeldovich 1964), für den nichtlinearen Bereich gibt es Computersimulationen (Aarseth/Gott/Turner 1979a/b, Aarseth 1985, Klypin/Shandarin 1983, Davis et al. 1985, Shapiro et al. 1983, White et al. 1987) und einige approximative, analytische Ansätze (Zeldovich 1970, Doroshkevich et al. 1975).

Im folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben über die wesentlichen Ingredienzien eines jeden Modells der Galaxienentstehung und eine Aufstellung der heute diskutierten Modelle. Diese unterscheiden sich durch verschiedene Annahmen über folgende Elemente des Strukturbildungsprozesses:

Materieinhalt des Universums: entweder dominiert ein Gemisch aus Baryonen und Photonen oder die sogenannte dunkle Materie (DM), wie massive Neutrinos oder supersymmetrische Teilchen

Art der Fluktuationen: adiabatisch/isotherm

Theorie der Zeitentwicklung kleiner Störungen auf einem homogenen Hintergrund ( $\delta \ll 1$ )

Anfangsbedingungen: z. B. das "skalenfreie Spektrum" nach Zeldovich 1972

Theorie für den nichtlinearen Bereich,  $\delta \geq 1$

Prozesse, die verschiedene räumliche Skalen auszeichnen:

Dämpfung durch Photonviskosität in einem Baryon/Photon dominiertem Universum

Landau - Dämpfung in einem Neutrino-Gas

Fragmentierung von Haufen und Superhaufen in einzelne Galaxien.

Dabei sind die Annahmen über diese verschiedenen Ingredienzien, die ein Modell bestimmen, untereinander abhängig. Z. B. bestimmt die Annahme über den dominierenden Anteil der dunklen Materie (heiße / kalte DM) die Größe der zuerst entstehenden Objekte, weil die Geschwindigkeitsdispersion der DM die Dämpfungsskala fixiert. Die Entscheidung welcher Materieanteil dominiert, läßt sich durch Messung der Ruhemasse der Neutrinos herbeiführen oder durch die Entdeckung der von den Elementarteilchentheorien zunächst nur postulierten supersymmetrischen Partnern der bekannten Teilchen.

Verschiedene Szenarien der Strukturbildung unterscheiden sich durch verschiedene Annahmen über die oben aufgezählten Elemente. In letzten Jahren haben sich in der Diskussion im wesentlichen zwei Klassen von Szenarien herauskristallisiert, die im folgenden kurz zusammengefaßt werden.

Es gab noch andere Modellvorschläge, die auf einer Theorie der Turbulenz im frühen Universum beruhen (Weizsäcker 1951, Dallaporta/Lucchin 1973, Jones 1976) die jedoch wegen der Unvereinbarkeit mit der Isotropie des Mikrowellenhintergrunds heute keine Rolle mehr spielen.

Da die mathematische Beschreibung der verschiedenen Modelle zum Teil sehr ähnlich ist, wird diese zusammengefaßt dargestellt in Paragraph 2 dieses Kapitels, unter Hinweis auf die jeweilige Anwendbarkeit auf die verschiedenen Szenarien.



## 1.1. Baryon-dominiertes Modell

### 1.1.1. Adiabatisches Fluktuationsspektrum

Es wird angenommen, daß die Relation zwischen dem Dichtekontrast der Baryonen und dem der Photonen gegeben ist durch

$$\delta|_{baryon} = \frac{3}{4} \delta|_{photon} \quad (I.1).$$

Die wichtigste Massenskala (Massen- und Längenskalen werden ineinander umgerechnet mittels der Hintergrunddichte  $\rho_0$ :  $M = \frac{4}{3}\pi \rho_0 L^3$ ) ist gegeben durch die Dämpfung von baryonischen Fluktuationen, verursacht durch die Wechselwirkung mit dem relativistischen Photonengas ("photon viscosity", Silk 1967/1968, Weinberg 1972). Unterhalb dieser Dämpfungsskala ("Silk-Masse"), die zur Rekombinationszeit bei  $10^{15} M_\odot$  liegt, werden alle Strukturen durch Dissipation eliminiert. Das bedeutet, die ersten Strukturen, die sich aus dem homogenen Hintergrund herausbilden, sind Haufen und Superhaufen von Galaxien. Durch anschließende Fragmentierung und Verklumpung der Fragmente sollen sich dann einzelne Galaxien und deren Verteilung innerhalb der Haufen formen. Die Entwicklung von kleinen Fluktuationen für dieses Szenarium ist bekannt (Bardeen 1980, Brandenberger et al. 1983, Peebles 1980). Für den nichtlinearen Bereich der Zeitentwicklung ist die sogenannte "pancake"-Theorie von Zeldovich (Zeldovich 1970/1984) anwendbar, die auf einem Approximationsansatz für die Lösung der Newtonschen hydrodynamischen Gleichungen mit verschwindendem Gasdruck ("Staub") beruht. Die Vernachlässigung des Gasdrucks ist gerechtfertigt durch die Größe der zuerst gebildeten Strukturen. Die Jeans-Länge bestimmt die Skala, auf der Druckeffekte relevant sind. Nach der Rekombinationszeit ist die Jeans-Masse etwa  $10^5 M_\odot$ , also um 10 Größenordnungen kleiner als die Silk-Masse. Zeldovich zeigt nun (Zeldovich 1970, siehe auch Lin et al. 1965 und Novikov 1975), daß man für beliebige Anfangsbedingungen erwarten kann, daß der größte Teil der Materie in "pancake"-artige, flache Strukturen kollabiert, d. h. der Gravitationskollaps wird im Spätstadium (kurz bevor sich die Teilchenbahnen schneiden, bzw. die Dichte unendlich groß wird) stets hochgradig anisotrop. Dieses Verhalten ist offensichtlich verschieden vom Kollaps einer interstellaren Gaswolke, die zur Sternbildung führt (Larson 1973b). Diese Art von "pancake"-Kollaps kann z.B. der beobachteten Filamentstruktur Rechnung tragen. Nachfolgende Fragmentation der "pancakes" führt zur Bildung von einzelnen Galaxien. Die qualitativen Vorhersagen der "pancake"-Theorie werden untermauert durch mathematische Untersuchungen der Singularitäten mit den Mitteln der Katastrophentheorie, die bei der Bewegung von Teilchen entstehen, die nur selbsterzeugten Gravitationskräften ausgesetzt sind (Arnold et al. 1982, Shandarin/Zeldovich 1984). Der nachfolgende Fragmentierungsprozeß ist schlecht verstanden (Sunyaev/Zeldovich 1972, Jones et al. 1981,

Heavens 1985, Bond/Centrella/Szalay 1984). Es zeigt sich daß durch dissipativen Kollaps nur etwa 15% der Baryonen so weit abkühlen, daß sich daraus Galaxien bilden können.

Eines der Hauptprobleme in baryon-dominierten Modellen ist die relativ kurze Zeitspanne, die zum Anwachsen der Fluktuationen von der Rekombinationszeit bis heute zur Verfügung steht und die langsame Zeitentwicklung, die nicht nach einem Exponentialgesetz abläuft, sondern mit einer Potenz von  $t$  (siehe Paragraph 2): Die Wachstumsrate ist noch um so kleiner je kleiner  $\Omega$  ist ( $\Omega$  ist das Verhältnis von tatsächlicher Dichte und kritischer Dichte, siehe Weinberg 1972). Durch Nukleosyntheserechnungen ist aber  $\Omega_{Baryon}$  beschränkt auf einen Bereich  $0.01 \leq \Omega_{Baryon} \leq 0.10$ , was zu einem Wachstumsfaktor der Fluktuationen von etwa 15 zwischen  $z = 1000$  und  $z = 3$  führt. Wegen der beobachteten Isotropie des Mikrowellenhintergrunds ist aber die Amplitude der Fluktuationen bei  $z = 1000$  beschränkt auf  $\delta \leq 10^{-4}$ , was aber bei einem Wachstumsfaktor von 15 niemals zu Amplituden von  $\delta = 10^{-5}$  auf der Skala einer Galaxie führen kann. Unter anderem ist dies ein Grund dafür, daß in letzter Zeit hauptsächlich DM-dominierte Szenarien diskutiert wurden (Cowsik/McClelland 1973, Bond et al. 1980, Peebles 1973, Bisnovatyi-Kogan/Novikov 1981, Davis/Lecar/Pryor/Witten 1981, Doroshkevich 1984, Sato/Takahara 1981), für die die Isotropie der Hintergrundstrahlung keine so starken Restriktionen für die Dichtefluktuationen liefert (Vittorio/Silk 1984).

Als Anfangsbedingung für das Fluktuationsspektrum bei  $z = 1000$  wird im allgemeinen ein "skalenfreies Harrison-Zeldovich" Spektrum (Zeldovich 1972) angenommen: Zu dem Zeitpunkt, zu dem eine Fluktuation den Teilchenhorizont überquert, soll die Amplitude  $\delta$  unabhängig sein von der Skalenlänge. Der Grund für diese Annahme sind Divergenzen auf kleinen Skalen, die bei der Extrapolation der Zeitentwicklung zurück bis  $t = 0$  für jedes andere Spektrum auftauchen.

### 1.1.2. Isothermes Fluktuationsspektrum

Die Annahme, daß es nur Fluktuationen in der Baryondichte gibt

$$\delta|_{Baryon} \neq 0, \quad \delta|_{Photon} = 0, \quad (I.2)$$

führt zu einem Szenarium, in dem die Störungen auf kleinen Skalen (Galaxien) zuerst anwachsen und die großräumigen Strukturen (Haufen, Filamente usw.) erst durch nachfolgende hierarchische Verklumpung der Galaxien entstehen (Peebles 1980, Gott/Rees 1975, Larson 1973a). Wegen  $\delta|_{Photon} = 0$  entfällt die Restriktion für  $\delta|_{Baryon}$  durch die Isotropie der Mikrowellenstrahlung, d. h. man kann die Anfangsbedingungen stets so wählen,

so daß bis  $z = 3$  die Fluktuationen ausreichend groß sind, was dem Modell einen Großteil seiner Erklärungskraft nimmt.

Da es keine Dämpfung von  $\delta|_{Baryon}$  durch Photonviskosität gibt, ist die Größenskala der Objekte, die zuerst verklumpen, gegeben durch die Jeans-Masse bei der Rekombinationszeit  $\approx 10^5 - 10^6 M_\odot$ , was in der Größenordnung eines Kugelsternhaufens liegt. Numerische N-Teilchen Simulationen, bei denen die Teilchenmasse der Masse dieser zuerst gebildeten Fragmente entspricht (Aarseth et al. 1979a, 1979b), zeigen allerdings keine ausgeprägten Filamente und "voids".

Ein Nachteil dieses isothermen Szenariums ist die schlecht begründbare Anfangsbedingung  $\delta|_{Photon} = 0$ . Rechnungen zur Erklärung der Baryonasymmetrie aufgrund von CP-verletzenden Wechselwirkungen im frühen Universum sagen voraus, daß das Verhältnis Baryondichte/Photondichte eine Konstante ist, die alleine durch die Elementarteilchenphysik gegeben ist und somit keinen räumlichen Schwankungen unterliegen sollte. Andererseits ist es möglich in einem Szenarium mit "cosmic-strings" isotherme Störungen zu produzieren (siehe auch Bond/Kolb/Silk 1982).

## 1.2. Szenarien mit dunkler Materie (DM)

Durch Vergleich der Massen von Galaxienhaufen, die einmal abgeleitet wurden aus dem Virialtheorem und zum anderen bestimmt wurden durch die Masse-Leuchtkraft-Beziehung und aufgrund von Messungen der Rotationskurven von einzelnen Galaxien, kommt man zu dem Schluß, daß es Materie geben muß, die keine elektromagnetische Strahlung aussendet, sondern nur gravitativ wirksam ist. Vieldiskutierte Kandidaten für diese DM sind massive Neutrinos und andere, exotische Teilchen, die von supersymmetrischen Feldtheorien vorhergesagt werden.

Ist der dominierende Materieanteil im Universum wirklich DM, so ist der Strukturbildungsprozeß natürlich bestimmt von den Fluktuationen, die sich in der DM entwickeln. Da die nicht-gravitativ Wechselwirkung der DM mit den Photonen praktisch verschwindet, impliziert die Isotropie der Hintergrundstrahlung nur Beschränkungen für die Amplitude der Fluktuationen in der DM, die durch den Sachs-Wolfe-Effekt (Sachs/Wolfe 1967; Inhomogenitäten des Mikrowellenhintergrunds verursacht durch die gravitative Wirkung von Inhomogenitäten der Baryonenverteilung) bestimmt werden. Deshalb ist es kein Problem solche Anfangsbedingungen zu wählen, so daß die Amplitude heute weit im nichtlinearen Bereich liegt. Außerdem hat in solchen Szenarien  $\Omega$  einen größeren Wert, als den durch die Nukleosynthese eingeschränkten. Somit ist auch die Wachstumsrate größer als in baryon-dominierten Modellen. Das Problem der zu kurzen Zeitspanne, die zur Strukturbildung zur Verfügung steht, entfällt hierin.

Je nach der Masse der DM-Teilchen lassen sich zwei prinzipiell verschiedene Realisierungen eines DM-dominierten Modells unterscheiden.

### 1.2.1. Heiße dunkle Materie (z.B. massive Neutrinos)

Die Entkopplung von der restlichen Materie findet bei einer Temperatur  $T \approx 1\text{MeV}$  statt, zu einer Zeit, zu der diese Teilchen noch relativistische Geschwindigkeiten haben. Der Zeitpunkt des Übergangs relativistische  $\rightarrow$  nichtrelativistische Energien ( $kT \approx mc^2$ ) fällt etwa zusammen mit dem Zeitpunkt des Übergangs von der strahlungsdominierten Ära zur Ära, in der die Entwicklung der Geometrie bestimmt wird durch den baryonischen Anteil. Das bedeutet, im Intervall  $t_{\text{entkoppl.}} \dots t_{\text{strahlungsdom.} \rightarrow \text{baryondom.}}$  bewegen sich die Teilchen ohne Wechselwirkung mit der restlichen Materie mit Geschwindigkeiten von der Größenordnung  $c$ . Das hat zur Folge, daß Inhomogenitäten, die kleiner sind

als die Horizontgröße zur Zeit  $t_{\text{entkoppl.}}$  durch die freie Bewegung der Teilchen eliminiert werden können, da die Horizontgröße eine Art Kohärenzlänge jeglicher Wechselwirkung vorgibt ("free-streaming", siehe Beitrag von Primack/Blumenthal in: Audouze/Tran Thanh Van 1984). Störungsrechnungen für eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung (Stewart 1972, Bisnovaty-Kogan/ Zeldovich 1971, Magalinskii 1973, Seliverstov 1974, Gilbert 1966, Bond/Szalay 1983) ergeben eine Dämpfungsskala von der Größenordnung  $10^{15} M_{\odot}$ . Das bedeutet, die ersten Strukturen, die sich aus dem DM-Anteil herausbilden können, sind von der Größenordnung eines Galaxienhaufens, ähnlich wie in dem baryon-dominierten Modell mit adiabatischem Spektrum. Durch die Verklumpung solch großräumiger DM-Strukturen entsteht ein Gravitationspotential, durch das die baryonische Materie in ähnlicher Weise zunächst auf solch großen Skalen verdichtet wird. Durch Fragmentierung und dissipativen Kollaps der Baryonen werden dann einzelne Galaxien gebildet (Kolykhalov/Shandarin 1984, Jones/Palmer/Wyse 1981, Palmer 1981b, Bond/Centrella/Szalay 1984, Beitrag von Blumenthal in: Faber 1987, S. 401). Akkretion der DM durch die baryonischen Fragmente liefert eine Erklärung für die DM-Halos der Galaxien (Bond/Szalay/White 1983). Die numerischen Simulationen können die beobachteten leeren Gebiete ("voids") in der Galaxienverteilung und die Filamentstruktur reproduzieren (Shapiro/Struck-Marcell/Melott 1983, Centrella/Melott 1983, Klypin/Shandarin 1983, Frenk/White/Davis 1983).

Der Unterschied zwischen den baryonischen "pancakes" in einem heißen DM-Modell und den "pancakes" in einem baryon-dominierten Modell liegt darin, daß in einem DM-"pancake" die Baryondichte niedriger ist, somit die Geschwindigkeiten und die Kühlungsrate kleiner sind (Zeldovich 1984).

Allerdings gibt es auch ernsthafte Diskrepanzen mit den Beobachtungen: Die Simulationen sind nur in Übereinstimmung mit den beobachteten Strömungsgeschwindigkeiten auf Skalen  $\geq 10 \text{ Mpc}$  und mit der Korrelationsfunktion, wenn die Parameter so gewählt sind, daß die Verklumpung auf Superhaufen-Skalen bei  $z \leq 0,5$  einsetzt, was im Widerspruch steht mit der Existenz von Quasaren bei  $z \geq 2$ . Rechnungen zum dissipativen Kollaps der Baryonen im Gravitationsfeld der DM-pancakes zeigen (Bond/Centrella/Szalay 1984), daß nur etwa 85% der Baryonen so weit kühlen, so daß sie sich zu Galaxien verdichten können. Es müßte demnach in Galaxienhaufen einen immensen Anteil an intergalaktischem Gas geben, das durch starke Röntgenemission bemerkbar sein müßte. Messungen an den DM-Halos von sphäroiden Zwerggalaxien ("dwarf spheroidals", Ikeuchi/Norman 1987) unter Benutzung der Erhaltung des Phasenraumvolumens bei stoßfreien Teilchen (Tremaine/Gunn 1979) ergeben eine untere Schranke für die Masse der den Halo konstituierenden Teilchen von  $m \geq 500 \text{ eV}$ , was im Rahmen des heißen DM-Szenariums ( $m_{\text{neutrino}} \approx 30 \text{ eV}$ ) nicht erklärbar ist. Der Haupteinwand von Peebles (Beitrag von Peebles in: Audouze/Tran Thanh Van 1984) gegen dieses Szenarium beruht auf der Unvereinbarkeit der beobachteten Kohärenzlänge in der Korrelationsfunktion der Galaxien

von  $\approx 5Mpc$  und den typischen Kohärenzlängen von  $\geq 20Mpc$  des Verklumpungsprozesses der DM. Letztlich steht und fällt dieses Szenarium aber mit der Entscheidung darüber, ob Neutrinos wirklich massiv sind oder nicht (Bilenky/Petcov 1987).

### 1.2.2. Kalte dunkle Materie (z.B. Photinos, Axionen)

So wie das heiße DM Szenarium dem baryon-dominierten Modell mit adiabatischem Fluktuationsspektrum ähnlich ist, so ähnelt das kalte DM Szenarium dem baryon-dominierten Modell mit isothermen Fluktuationsspektrum (hierarchische Verklumpung von kleinen Skalen zu großen Skalen). Da die Masse der kalten DM-Teilchen  $\gg 1keV$  ist und die Entkopplung erst zu einer Zeit stattfindet, nachdem die Teilchengeschwindigkeiten nicht-relativistisch sind, spielt Dämpfung durch "free-streaming" keine Rolle (Blumenthal et al. 1982, Shapiro 1984). Fluktuationen (siehe Valdarnini 1985 für Photinos) können deshalb nur anwachsen nach der Entkopplung der Strahlung von den Baryonen (vorher wird das Anwachsen verhindert durch die Photon-Viskosität, Meszaros-Effekt). Die kleinsten Strukturen, die zuerst das nichtlineare Regime erreichen, sind demnach von der Größenordnung der Jeans-Masse zur Zeit der Entkopplung Strahlung/Baryonen  $\approx 10^6 M_\odot$ . Dies ist die Massenskala von Kugelsternhaufen. Galaxien und Galaxienhaufen entstehen durch sukzessives Verklumpen solcher Substrukturen. Problematisch ist dabei allerdings ebenso die Kühlung der Baryonen durch dissipativen Kollaps, der durch Druckkräfte auf solch kleinen Skalen verhindert werden kann. Vor allem die Erklärung der großräumigen Strukturen ("voids", Filamente usw.) macht Schwierigkeiten. Keine Probleme bietet die Erklärung der sphäroiden Zwerggalaxien. Allerdings hängt auch dieses Modell von der Existenz der bislang hypothetischen Teilchen, wie Photinos, Axionen usw. ab.

Ist das Universum dominiert von einer Teilchensorte im mittleren Massenbereich  $\approx 1keV$  (z.B. Gravitinos) so resultiert ein Szenarium ("warmes DM-Modell"), das Elemente aus den beiden oben geschilderten Modellen besitzt (Shapiro 1984, Beitrag von Primack/Blumenthal in: Audouze/Tran Thanh Van 1984). Die Strukturen, die sich zuerst verdichten, sind dabei von der Größenordnung einer Galaxie  $\approx 10^{10} M_\odot$ .

Problematisch in allen bislang diskutierten Modellen ist die Erklärung der Beziehung zwischen morphologischem Galaxientypus (elliptisch, spiralförmig oder irregulär) und der Dichte der Umgebung in der der jeweilige Typus beobachtet wird. Ein Vorschlag zur Erklärung der Abhängigkeit der Korrelationslänge von der Längenskala (Galaxien, Haufen) ist der sogenannte "biasing" Mechanismus, dem zu Folge die Verdichtungen der sichtbaren Materie entkoppelt werden von den Verklumpungen der DM (Trimble 1986, Dekel/Rees 1987). Pietronero 1987 kritisiert allerdings die Auswertung der Beobachtungen

der großräumigen Materieverteilung und führt den Unterschied in den Korrelationslängen für verschiedene Objekte in der Hierarchie der Verklumpung auf eine unsachgemäße Anwendung der Korrelationsfunktion zurück.

Die oben geschilderten Modelle beruhen auf verschiedenen Annahmen über den dominierenden Materieinhalt des Universums und der rein gravitativen Dynamik von Dichtefluktuationen. Es ist aber möglich, daß die Strukturbildung entscheidend von nicht-gravitativen Prozessen beeinflusst wird. Von Ostriker stammt die Vorstellung, daß die Supernovaexplosionen von supermassiven Sternen zu einer Schockwellenbildung führen, die Verdichtungen in der Größenordnung von Galaxien erzeugen. Sphärische "voids" finden ihre Erklärung durch die Gebiete niedriger Dichte, die eine sphärische Schockwelle hinterläßt. Die Galaxien entstehen hauptsächlich in der Umgebung der Schockfront (siehe Ostriker/Cowie 1981, Bertschinger 1983, Vishniac/Ostriker/Bertschinger 1985).

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß es kein Modell gibt, das in allen Punkten befriedigend mit den Beobachtungen übereinstimmt.

## 2. Mathematische Beschreibung

Ist die Entwicklung von Dichteinhomogenitäten in erster Linie bestimmt durch Gravitationskräfte, so liefert die allgemeine Relativitätstheorie den angemessenen mathematischen Rahmen. Es gibt detaillierte Untersuchungen von Fluktuationen auf einem homogenen Hintergrund, sowohl im Rahmen einer hydrodynamischen Beschreibung der Materie (Olson 1976, Bardeen 1980, Brandenberger et al. 1983, Chellone 1981, Press/Vishniac 1979/1980, Peebles 1980, Voglis 1986, Weinberg 1972) als auch für die Beschreibung durch eine Einteilchen-Verteilungsfunktion (Stewart 1972). Da dies nicht Gegenstand der Arbeit ist, soll darauf nicht weiter eingegangen werden. Für den nichtlinearen Bereich ( $\delta \geq 1$ ), d.h. für solche Dichten, für die die Störungstheorie ungültig wird, gibt es nur Rechnungen für sphärisch-symmetrische Konfigurationen (für diese Symmetrie und für verschwindenden Gasdruck ist die exakte Lösung der Einstein-Gleichungen bekannt, Heath 1982, Henriksen/Robertis 1980, Silk/Wilson 1979) und einige Überlegungen mittels der Szekeres-Staub-Lösungen (Barrow/Silk 1981). Die Entwicklung von homogenen, sphäroiden Konfigurationen wird in Palmer 1981a und Barrow/Silk 1981 untersucht.

Beschränkt man sich auf Gebiete, die kleiner als die momentane Horizontgröße sind und auf Bewegungen mit Geschwindigkeiten  $\ll$  Lichtgeschwindigkeit, so genügt es, die Dynamik der Inhomogenitäten im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie als Grenzfall der Einsteinschen Theorie zu untersuchen. Alle Ausführungen in dieser Arbeit beziehen sich auf diesen Grenzfall. Obwohl die Newtonsche Theorie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die allgemeine Relativitätstheorie beschränken sich die Untersuchungen bislang auf homogene kosmologische Modelle (Heckmann/Schücking 1955/1956) und auf sphärisch symmetrische Kollapsmodelle (Glass 1980, Filmore/Goldreich 1984, Munier 1985, Perrenod 1978). Zu den Newtonschen Analoga der Szekeres Lösungen siehe Lawitzky 1979).

Im Prinzip handelt es sich bei dem Problem der Verklumpung von Materie, bewirkt durch Gravitationskräfte um ein N-Körperproblem, wobei N die Gesamtzahl aller Elementarteilchen in einem bestimmten Volumen ist und die Kräfte allein durch die N Teilchen selbst erzeugt werden. Da dieses Problem im allgemeinen nicht lösbar ist und man auch an dem Verhalten auf mikroskopischen Skalen nicht interessiert ist, beschränkt man sich auf verschiedene Näherungen, die man durch Mittelungsprozeduren aus dem N-Körperproblem gewinnt. Ein erster Schritt ist die Beschreibung durch ein Gibbs-Ensemble von Systemen, die jeweils N Teilchen enthalten und sich durch die Geschwindigkeitsverteilung und die räumliche Verteilung unterscheiden. Die Elemente dieses Ensembles repräsentieren verschiedene makroskopische Realisierungen eines N-Teilchen Systems mit verschiedenen makroskopischen Größen. Zu einer bestimmten Zeit  $t$  ist die Wahrscheinlichkeit eines der

Systeme innerhalb eines gewissen Bereichs des  $6N$ -dimensionalen Phasenraums zu finden, gegeben durch

$$f^{(N)}(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(N)}, \vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)}, t) d\vec{x}^{(1)} \dots d\vec{x}^{(N)} d\vec{v}^{(1)} \dots d\vec{v}^{(N)} \quad (I.3).$$

$f^{(N)}$  ist die  $N$ -Teilchen Verteilungsfunktion,  $\vec{x}^{(i)}, \vec{v}^{(i)}$  die Orts- und Geschwindigkeitskoordinate des  $i$ -ten Teilchens.  $f^{(N)}$  wird bestimmt als Lösung der Liouville-Gleichung, die nichts anderes als die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit ausdrückt:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \vec{v}_i^{(\alpha)} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial x_i^{(\alpha)}} + Gm \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha}^N \frac{x_i^{(\beta)} - x_i^{(\alpha)}}{|\vec{x}^{(\beta)} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial v_i^{(\alpha)}} = 0 \quad (I.4).$$

$G$  ist die Newtonsche Gravitationskonstante und  $m$  die Masse der Teilchen.

Daß die Liouville-Gleichung noch die volle Information des  $N$ -Körperproblems enthält, kann man daran sehen, daß die Charakteristiken der Gleichung (I.4) genau die Bahnen der  $N$  Teilchen sind. Von (I.4) ausgehend kann man nun verschiedene Näherungen durch Mittelungsverfahren angeben, wie z.B. die Beschreibung durch eine stoßfreie Boltzmann-Gleichung oder die hydrodynamischen Euler-Poisson-Gleichungen, die die Grundlage dieser Arbeit bilden (siehe Abbildung 1).

Durch Integration über alle  $6(N - n)$  Phasenraumkoordinaten lassen sich aus  $f^{(N)}$  reduzierte Verteilungsfunktionen bilden

$$f^{(n)} \equiv \int \dots \int f^{(N)} dV^{(N-n)} \quad (I.5)$$

für die sich mittels der Liouville-Gleichung (I.4) eine Hierarchie von  $N$  Gleichungen angeben läßt, die sogenannte BBGKY-Hierarchie (Saslaw 1985, Peebles 1980). Die Gleichung für jedes  $n$  ist gekoppelt mit der Gleichung für  $n + 1$ , wobei  $n = N$  die Liouville-Gleichung selbst ergibt. Für  $n = 1$  ergibt sich die stoßfreie Boltzmann-Gleichung für die Ein-Teilchen-Verteilungsfunktion, wenn man den Kopplungsterm, der  $f^{(2)}$  enthält, vernachlässigt. Eine andere Möglichkeit aus (I.4) die stoßfreie Boltzmann-Gleichung herzuleiten, beruht auf der Annahme, daß  $f^{(N)}$  ein Produkt von  $N$  Ein-Teilchen-Verteilungsfunktionen  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  ist, was einfach die statistische Unabhängigkeit der Phasenraumverteilung verschiedener Teilchen ausdrückt (Fridman/ Polyachenko 1984). Integriert man (I.4) mit diesem Ansatz für  $f^{(N)}$  über die Phasenraumkoordinaten aller Teilchen außer einem, so lautet die Bewegungsgleichung für  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (I.6)$$

wobei  $\Phi$  das Gravitationspotential der  $N$  Teilchen ist. Im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie wird  $\Phi$  erzeugt durch die Materiedichte  $\rho$ , die gleich ist dem nullten Moment von  $f$ :

$$\Delta\Phi = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{v} \quad (I.7).$$

Gleichungen (I.6), (I.7) bilden ein vollständiges System für die Größen  $f, \phi$  (*Vlasov-Gleichung*). In der Näherung (I.6) sind nur noch Kräfte berücksichtigt, die durch das mittlere Kraftfeld  $\nabla\Phi$  erzeugt werden. Das Vlasov-System ist die Grundlage für die Beschreibung der Szenarien mit dunkler Materie

Durch Bildung von Geschwindigkeitsmomenten aus  $f$  gelangt man schließlich von (I.6), (I.7) zu den hydrodynamischen Gleichungen für die Massendichte  $\rho(\vec{x}, t)$ , ein mittleres Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  und dem Gravitationspotential  $\Phi(\vec{x}, t)$ . Dabei ist jedoch wiederum die Zeitentwicklung des  $n$ -ten Moments gekoppelt an das  $(n + 1) - te$  Moment, d.h. um zu einem geschlossenem Gleichungssystem zu gelangen, bedarf es zusätzlicher Annahmen, die die Hierarchie der Momentengleichungen abschneiden ("closure problem"). Mit der Annahme, daß jede Geschwindigkeitskomponente die Summe aus einem mittleren Anteil und einem Anteil von Fluktuationen ist, die nicht autokorreliert sind, läßt sich die mittlere Geschwindigkeitsdispersion mit einem isotropen Gasdruck in den Euler-Poisson-Gleichungen identifizieren (Saslaw 1985). Um ein geschlossenes System für die hydrodynamischen Größen zu bekommen, muß man noch eine Beziehung zwischen Gasdruck und Dichte vorschreiben (Zustandsgleichung), die aus thermodynamischen Relationen gewonnen wird. Das Euler-Poisson-System für  $\rho, \vec{v}, \Phi$  bzw.  $\vec{g}$  und  $p$  lautet:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (I.8a)$$

$$\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (I.8b)$$

$$\nabla \times \vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = -\nabla\Phi \quad (I.8c)$$

$$\nabla \cdot \vec{g} = -\rho \quad (I.8d)$$

$\vec{g} = -\nabla\Phi$  ist die gravitative Beschleunigung (Einheiten:  $4\pi G = 1$ ).

Für ein baryon-dominiertes Modell liefern diese Gleichungen die adäquate Beschreibung. Da das System (I.8) aus (I.6), (I.7) durch Momentenbildung gewonnen werden kann, liefert (I.8) auch eine Beschreibung für stoßfreie DM, unter folgenden Bedingungen:

mit  $p = 0$  ist (I.8) eine gute Näherung für kalte DM (Geschwindigkeitsdispersion  $\langle v^2 \rangle \approx 0$ ) auf Skalen, die groß sind gegen die freie Weglänge der DM-Teilchen

mit  $p = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \rho$  ist (I.8) eine Näherung für heiße DM auf Skalen groß gegen die freie Weglänge.

Da alle Aussagen in dieser Arbeit auf der hydrodynamischen Beschreibung beruhen, wird im folgenden nicht mehr auf die Beschreibung durch die Vlasov-Gleichungen eingegangen. Weitere Literatur über Untersuchungen dieses Systems im Zusammenhang mit der Kosmologie sind Bouchet/Kendrup 1985, Kendrup 1982 (Korrelationsdynamik), Doroshkevich/Klypin/Kotok 1986 (Szenarium mit instabilen Neutrinos), Norman/Silk 1978.

Für frühe Zeiten  $t < t_{\text{Rekomb}}$  genügt es, die Entwicklung zu beschreiben durch eine linearisierte Störungstheorie auf einem homogenen Hintergrundmodell. Die homogenen ( $\nabla\rho = 0$ ) Lösungen von (I.8) mit isotropem Geschwindigkeitsfeld (Heckmann/Schücking 1955/1956) sind gegeben durch:

$$\ddot{\rho}_0 - \frac{4}{3} \frac{\dot{\rho}_0^2}{\rho_0} - \rho_0^2 = 0 \quad (I.9a)$$

$$\vec{v}_0 = -\frac{1}{3} \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \vec{x} \quad (I.9b)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \rho_0 \vec{x}^2 \quad (I.9c)$$

Für homogene, isotrope kosmologische Modelle stimmen die Lösungen von (I.9) vollständig mit den entsprechenden Lösungen der Einstein-Gleichungen überein. Ein "flaches" Hintergrundmodell bekommt man aus (I.9), wenn man die nichttriviale Integrationskonstante in (I.9a) gleich Null setzt:

$$\rho_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{t^2} \quad (I.10a)$$

$$\vec{v}_0 = \frac{2}{(3t)} \vec{x} \quad (I.10b)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{(9t^2)} \vec{x}^2 \quad (I.10c)$$

Die Entwicklung von Störungen dieses Hintergrunds (I.10)

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_0 \delta + \dots \quad (I.11a)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \varepsilon \vec{u} + \dots \quad (I.11b)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \phi + \dots \quad (I.11c)$$

werden beschrieben durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$t^2 \ddot{\delta}_{it} + \frac{4}{3} t \dot{\delta}_t + \tilde{\delta}(\gamma |\vec{k}|^2 t^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}) = 0 \quad (I.12)$$

wobei  $\tilde{\delta}(\vec{k}, t)$  die Fourier-Transformierte von  $\delta(\vec{\xi}, t)$  mit "mitbewegtem" Wellenvektor  $\vec{k}$  bedeutet. Die "mitbewegten Koordinaten"  $\vec{\xi}$  sind definiert durch

$$\vec{\xi} \equiv \frac{\vec{x}}{t^{\frac{2}{3}}}$$

Als Zustandsgleichung wurde  $p = \gamma\rho$ ,  $\gamma = \text{const.}$  angenommen. Die Störungen des Geschwindigkeitsfeldes sind vollständig bestimmt durch die Lösungen der Gleichung (I.12) ( $\tilde{u}_i$  ist wiederum die Fourierkomponente von  $u_i$ ):

$$\tilde{u}_i = t^{-\frac{2}{3}} \left[ \eta_i(\vec{k}) + ik_i \int \tilde{\delta} \left[ -\gamma + \frac{2}{3} t^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{|\vec{k}|^2} \right] dt \right] \quad (\text{I.13})$$

$\eta_i(\vec{k})$  sind Integrationsfunktionen, die für rotationsfreie Störungen verschwinden müssen. Die Lösungen von (I.12) sind gegeben durch Besselfunktionen (Weinberg 1972):

$$\tilde{\delta} = t^{-\frac{1}{6}} \left[ f_1(\vec{k}) J_{\frac{5}{2}}(3\sqrt{\gamma|\vec{k}|^2} t^{\frac{1}{3}}) + f_2(\vec{k}) J_{-\frac{5}{2}}(3\sqrt{\gamma|\vec{k}|^2} t^{\frac{1}{3}}) \right] \quad (\text{I.14}).$$

Aus (I.12) kann man auch ablesen, daß je nach dem Vorzeichen des Koeffizienten von  $\tilde{\delta}$  die Störungen anwachsen (Jeans-Instabilität) oder oszillieren. Der Unterschied zu Störungen eines homogenen Gases stoßfreier Teilchen zeigt sich nur auf kleinen Skalen: statt ungedämpfte Oszillationen gibt es ein monotones Abklingen der Amplitude. Die typische Dämpfungsskala für stoßfreie Materie kann auch aus (I.12) abgeleitet werden, wenn man  $\gamma = \frac{1}{3} < v^2 >$  setzt. Zusammen mit der Wahl eines Anfangsspektrums der Dichtefluktuationen,  $f_1(\vec{k})$ ,  $f_2(\vec{k})$  bilden (I.12), (I.13) die Grundlage für die Theorie der Galaxienentstehung im Bereich  $\delta \ll 1$ . Die Störungstheorie für mehrkomponentigen Materieinhalt ist behandelt in Nurgaliev 1986, Soloveva/Nurgaliev 1985.

Für die Zeiten, in denen  $\delta \gg 1$  ist, also die lineare Theorie keine Näherung mehr darstellt, gibt es bislang folgende Ansätze, die Zeitentwicklung von Dichteinhomogenitäten zu beschreiben:

a) *numerische Simulationen*: Im Rahmen des Modells der hierarchischen Verklumpung ("hierarchical clustering") gibt es N-Körper Rechnungen, bei denen die Teilchen mit fertigen Galaxien identifiziert werden. Es zeigt sich zwar eine ausgeprägte Tendenz zur Haufenbildung, jedoch nicht die beobachteten Filamente auf großen Skalen. Der größte Teil der Arbeiten über numerische Simulationen bezieht sich auf Szenarien mit DM. Die Tendenz zu hochgradig anisotropen Bewegungen in der Spätphase ist nachweisbar, wie im "pancake"-Szenarium vorhergesagt. Auch die beobachteten großräumigen Strukturen werden reproduziert. Das Hauptproblem ist jedoch —wie oben bereits angedeutet— die Anpassung an die Korrelationsfunktion und die zu späte Verklumpung auf großen Skalen. Für die Beschreibung der "pancakes" in einem Stadium, in dem Druckkräfte, Kühlungsmechanismen und Schockwellenbildung wichtig werden, beschränkt man sich auf die Idealisierung, daß alle Geschwindigkeiten und Dichtegradienten in der Richtung senkrecht zur Richtung maximaler Kontraktion verschwinden (1-D Lösungen von (I.8)). Für rein baryonische "pancakes" findet man Abschätzungen über Temperaturverlauf, Dichteprofil und Schockwellenbildung in Doroshkevich/Shandarin/Saar 1978, Sunyaev/Zeldovich

1972. Eine ausführliche Behandlung dieses Problems für "pancakes", die aus Baryonen und DM bestehen, wird in Bond/Centrella/Szalay 1984 und Melott 1982/1983 angegeben.

Erst seit kurzem gibt es Versuche, das System (I.8) in drei Dimensionen numerisch zu integrieren (Peebles 1987).

b) Durch spezielle Reihenentwicklungen ("two-time- expansions") wird von Kates (1987) versucht, Aussagen über den schwach nichtlinearen Bereich zu gewinnen. Fast ebene Wellen (kleine Krümmung der Wellenfronten) auf einem statischen Hintergrund zeigen sogenannte "self-focusing" Singularitäten, wie sie aus der nichtlinearen Optik bekannt sind. Diese führen in endlicher Zeit zu unendlich großen Dichten. Die Einhüllende dieser Welle ist bestimmt durch eine zwei-dimensional nichtlineare Schrödinger-Gleichung (Abblowitz/Segur 1981, Asano 1974).

c) *Zeldovichs Näherungslösung für  $p=0$* : Das "pancake"-Szenarium (realisiert entweder durch ein baryon-dominiertes Modell mit adiabatischem Spektrum oder durch ein Modell mit heißer DM) beruht auf einer einfachen Näherungslösung des Systems (I.8) für  $p = 0$ . Die Annahme verschwindenden Gasdrucks ist gerechtfertigt, weil die Fluktuationen, die zuerst den nichtlinearen Bereich erreichen, wegen der Dämpfung durch Photon-Viskosität oder "free-streaming" von der Größenordnung  $10^{15} M_{\odot}$  sind, was etwa neun Größenordnungen über der Jeans-Masse zu dieser Zeit liegt.

Die Näherungslösung beruht auf einem Ansatz für die Bewegung der Teilchen

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t) = a(t) \vec{X} - b(t) \vec{S}(\vec{X}) \quad (I.15)$$

wobei  $\vec{x}$  die Eulerkoordinaten und  $\vec{X}$  Lagrangekoordinaten bedeuten.  $\vec{S}(\vec{X})$  ist eine frei wählbare Funktion, die durch Anfangsbedingungen bestimmt wird. Die Funktionen  $a(t), b(t)$  hängen ab vom jeweiligen Hintergrundmodell, z.B. für die Wahl (I.10) gilt  $a(t) = t^{\frac{2}{3}}, b(t) = t^{\frac{4}{3}}$  (Doroshkevich et al. 1975). Die Dichte ist dann gegeben durch

$$\rho = \frac{\rho_0}{\det \frac{\partial x_i}{\partial X_j}} = \frac{\rho_0}{a^3 |\delta_{ij} - \frac{b}{a} \frac{\partial S_i}{\partial X_j}|} \quad (I.16)$$

$\rho_0$  ist die Hintergrunddichte. Wählt man ein Koordinatensystem, in dem  $\frac{\partial S_i}{\partial X_j}$  diagonal ist, so läßt sich  $\rho$  schreiben als

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3 (1 - \frac{b}{a} \xi_1)(1 - \frac{b}{a} \xi_2)(1 - \frac{b}{a} \xi_3)} \quad (I.17)$$

wobei  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  die Wurzeln von

$$\det \left( \frac{\partial S_i}{\partial X_j} + \xi \delta_{ij} \right) = 0 \quad (I.18)$$

sind. Die Diagonalität von  $\frac{\partial S_i}{\partial X_j}$  längs einer Teilchenbahn bleibt erhalten, wenn der Fluß ein rotationsfreies Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \frac{d\vec{f}}{dt}$$

hat. Da die Wahrscheinlichkeit, daß die drei Eigenwerte  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  gleich sind (sphärisch-symmetrischer Kollaps), verschwindenden gering ist —so argumentiert Zeldovich — dominiert nach einer gewissen Zeit stets die Kontraktion in einer Richtung, gegeben durch den Eigenvektor von  $\frac{\partial S_i}{\partial X_j}$ , der zum größten Eigenwert gehört. Das bedeutet, der Gravitationskollaps auf großen Skalen kann ab einer bestimmten Zeit stets als eine quasi eindimensionale Bewegung aufgefaßt werden. Allerdings ist (I.15) nur eine Näherung bis zu der Zeit, für die  $\rho \rightarrow \infty$  wird, die bestimmt ist durch

$$1 - \frac{b}{a}\xi_1 = 0 \quad (I.19)$$

wenn  $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3$  ist. Für beliebige Anfangsbedingungen bilden sich also stets flache, "pancake"-artige Strukturen. Diese müssen aber nicht wirkliche Ebenen im 3-dimensionalen Raum sein, da die Eigenrichtung zum größten Eigenwert von der jeweiligen Teilchenbahn  $\vec{X}$  abhängt. Unendlich große Dichten in den "pancakes" sind natürlich unphysikalisch. Hat der "pancake" eine bestimmte Dicke erreicht (Größenordnung der Jeanslänge), so beginnen Druckkräfte die gravitative Anziehung zu kompensieren und die Beschreibung durch die Zustandsgleichung  $p = 0$  bricht zusammen. Die numerischen Simulationen bestätigen die qualitativen Vorhersagen dieses Näherungsansatzes. In Doroshkevich/Ryabenkii/Shandarin 1975 werden notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen angegeben, für die (I.15) eine Näherung der allgemeinen Lösung von (I.8) mit  $p = 0$  ist.

d) Weitere Arbeiten über die Frage von *nichtlinearen Effekten in der Entwicklung von Dichteinhomogenitäten* stammen von Liang 1976/1977a/1977b/1979, Liang/Baker 1977, Peebles 1970, Vishniac 1982a/1982b. Peebles 1970 untersucht die Frage des Energietransfers zwischen verschiedenen Fourierkomponenten (d.h. zwischen verschiedenen Längenskalen) in zweiter Ordnung Störungstheorie und bestimmt eine obere Grenze des Dichtekontrasts, die in der Größenordnung großer Galaxien liegt. Zu einem ähnlichen Resultat kommt Liang (1979), der eindimensionale (ebene), stationäre Wellen in einer selbstgravitierenden Flüssigkeit untersucht. Bei der Berücksichtigung von Viskosität — erzeugt durch Compton-Streuung — ist ein typisch nichtlinearer Effekt, daß die Dämpfungsrate für die Dichtemaxima kleiner ist, als die Dämpfungsrate für die Dichteminima. Vishniacs (1982a/1982b) Arbeit ist eine Erweiterung von Peebles (1970). Für relativistische, nicht-lineare Wellen in einem idealen Gas (ohne Selbst-Gravitation) bewirkt der Energietransfer zwischen verschiedenen Fouriermoden eine Dissipation für Frequenzen, bei denen die

lineare Theorie vernachlässigbare Dissipation vorhersagt. Das bedeutet, das Fluktuationspektrum kann durch nichtlineare Effekte schon in der Zeit vor der Rekombination signifikant modifiziert werden.

Eine Arbeit über Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung im Rahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie ist Tomita 1967/1971 (siehe auch Juszkiewicz 1981 und Zentsova/Chernin 1980).

Störungen in 1-D Universen im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie sind untersucht in Liang (1976), relativistische, nichtlineare Wellen in Liang (1977a/1977b) und die Dämpfung relativistischer Schocks in Liang/Baker (1977). Von der nichtlinearen Entwicklung von "voids" handelt Suto/Sato/Sato 1984.

e) In dieser Arbeit werden neue Modelle für den asymmetrischen Gravitationskollaps konstruiert, basierend auf exakten Lösungen des Systems (I.8), die somit für den gesamten nichtlinearen Bereich gültig sind (siehe Kapitel II.1. und Buchert/Götz 1987).

## II. MODELLE FÜR DEN NICHTLINEAREN BEREICH DES GRAVITATIONSKOLLAPS UND NICHTLINEARE PHÄNOMENE IN SELBSTGRAVITIERENDEN FLÜSSIGKEITEN

### 1. Übersicht dieses Kapitels

Wie aus dem Überblick über die verschiedenen Szenarien in I. deutlich wird, existieren in jedem Modell spezifische Probleme, die theoretischen Rechnungen mit der Vielfalt der Beobachtungen in Einklang zu bringen. In jedem Fall ist es aber notwendig, ein besseres Verständnis für den nichtlinearen Bereich der Zeitentwicklung von Dichteinhomogenitäten zu gewinnen, da die Auflösung bei den numerischen Simulationen wegen der beschränkten Teilchenzahl ( $\leq 10^5$ ) insbesondere auf kleinen Skalen so gering ist, daß die Aussagen darüber stark von der Gittergröße beeinflusst sind. So bräuchte man für die zuverlässige numerische Berechnung eines Szenariums mit hierarchischer Verklumpung eine gute Auflösung von der Skala der kleinsten Fragmente ( $\approx 10^5 M_\odot$ ) bis hin zur Skala der Superhaufen ( $\approx 10^{15} M_\odot$ ), also über 10 Größenordnungen, was mit heutigen Computern nicht zu leisten ist.

Der Energietransfer zwischen verschiedenen Skalen findet deshalb in den numerischen Rechnungen praktisch keine Berücksichtigung. Ein Beispiel für ein typisch nichtlineares Phänomen sind die "self-focusing" Singularitäten (Kates 1987) bei "fast" ebenen Wellen oder die Existenz von stabilen Solitonen, die im Paragraph 3 dieses Kapitels diskutiert werden. Daß es solche typisch nichtlinearen Erscheinungen, wie Solitonen, deterministisches Chaos oder die sogenannte "Wiederkehr des Anfangszustandes" (siehe Fermi-Pasta-Ulam Problem oder KdV-Gleichung) auch in selbstgravitierenden Flüssigkeiten geben könnte, wurde schon manchmal vermutet (Liang 1977a, Barrow 1980, Anile 1983). In der Plasmaphysik und der Hydrodynamik sind solche Phänomene schon längst bekannt (Whitham 1974, Tsytovich 1970, Newell 1985). Zum Beispiel die Abhängigkeit des Inhomogenitätsgrades von der Längenskala muß auf einen nichtlinearen Effekt zurückzuführen sein, da die lineare Störungstheorie eine unabhängige Entwicklung der Fouriermoden vorhersagt. Ein anderes Beispiel für die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Längenskalen ist die Relation zwischen morphologischem Typ der Galaxien und der Umgebung, in der der jeweilige Typus auftritt.

Die Analogien zwischen Systemen der Plasmaphysik und selbstgravitierenden Systemen, wie (I.6), (I.7) und (I.8) sind zwar seit langem bekannt (Fridman/Polyachenko 1984, Saslaw 1985), aber die dabei verwendeten Methoden finden kaum Anwendung in der Astrophysik.

Um nun unabhängig zu sein von den detaillierten Vorgaben eines bestimmten Szenariums, kann man sich darauf beschränken, nach typischen nichtlinearen Erscheinungen zu suchen, die durch (I.8) bestimmt sind. Ein Hauptunterschied zur Plasmaphysik und der Hydrodynamik besteht wohl darin, daß dort die Untersuchung durch feste Vorgabe von Randbedingungen und Symmetrien vereinfacht wird. Für die Theorie der Galaxienentstehung ist die ad-hoc Vorgabe von Symmetrien nur zu rechtfertigen im Rahmen bestimmter Modelle, die man aber erst durch die Gleichungen selbst begründen muß. Ein Beispiel ist der 1-D Kollaps als generische Erscheinung innerhalb des "pancake"-Modells.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit beziehen sich ausschließlich auf die hydrodynamische Beschreibung (I.8).

In *Abschnitt 2* wird ein Modell für den Gravitationskollaps diskutiert, unter den Annahmen  $p = 0$  ("Staub") und zweier verschwindender Eigenwerte des Expansionstensors des rotationsfreien Materieflusses. Motiviert sind diese Annahmen durch das "pancake"-Szenarium, für das  $p = 0$  eine gerechtfertigte Annahme ist (siehe I. 1.1.1). Da man weiß, daß für das Spätstadium des Kollaps hochgradig anisotrope Bewegungen dominieren, liegt die idealisierte Annahme nahe, daß die Bewegung in zwei Richtungen jedes Flüssigkeitselements gänzlich zu vernachlässigen ist. Dann kann man zeigen, daß die in Abschnitt 2 angegebene exakte Lösung die allgemeinste Lösung der Gleichungen (I.8) für  $p = 0$  und zweier verschwindender Eigenwerte des Expansionstensors ist (Satz 1). Diese Lösung (Satz 2) hat keine Symmetrie. Dabei variiert die Richtung, die zum einzigen nicht-verschwindenden Eigenwert gehört, von Teilchenbahn zu Teilchenbahn, d.h. es handelt sich nicht um eine eben-symmetrische Lösung, die aber als Spezialfall enthalten ist. Ein weiterer Spezialfall ist eine Lösung, bei der der Eigenvektor zum nicht-verschwindenden Eigenwert nur noch in einer Richtung variiert. Damit wird eine Art gekrümmter "pancake" beschrieben mit verschwindender Gaußkrümmung aber nicht-verschwindender mittlerer Krümmung. In Paragraph 2.2. werden die Niveauflächen der Dichteverteilung untersucht, und die Flächen, auf denen der Eigenvektor zum nicht-verschwindenden Eigenwert senkrecht steht. Die Niveauflächen der Dichte haben stets negative Gauß-Krümmung.

In *Abschnitt 3* wird die Existenz von Solitonen in einer selbstgravitierenden Flüssigkeit mit isothermer Zustandsgleichung ( $p = \gamma\rho$ ,  $\gamma = \text{const.}$ ) gezeigt. Für den 1-D Fall läßt sich das System (I.8) reduzieren (ohne zusätzliche Näherungsannahmen) auf eine sine-Gordon-Gleichung, die durch "inverse scattering" (Ablowitz/Segur 1981) gelöst werden kann. Die herausragenden Eigenschaften der sine-Gordon-Gleichung sind die Existenz von Solitonen und das wohlbestimmte asymptotische Verhalten: jede beliebige Anfangsbedingung entwickelt sich asymptotisch in eine Superposition von  $N$  Solitonen, wobei von den Anfangsbedingungen nur die Anzahl  $N$  und die Amplitudenverteilung der Solitonen bestimmt ist. Dieses Verhalten überträgt sich auf das Gravitationssystem nur für den Fall

von Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit. Sämtliche Lösungen des Gravitationssystems (I.8), die erzeugt werden können aus der 1- und 2-Soliton Lösung der sine-Gordon-Gleichung werden diskutiert. Aus der trivialen Lösung und der 1-Soliton Lösung der sine-Gordon-Gleichung lassen sich sowohl ein einzelner Puls erzeugen, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, als auch die homogene Lösung, für die die Dichte nur eine Funktion der Zeit ist. Die 1-Soliton-Lösung des Gravitationssystems zeigt eine marginale Stabilität gegen lineare Störungen. Die Soliton-Soliton Konfiguration produziert eine Lösung von (I.8), die die elastische Wechselwirkung zweier lokaler Verdichtungen beschreibt. Die beiden Pulse haben eine zeitlich veränderliche Amplitude, die asymptotisch einen konstanten, nicht-verschwindenden Wert annimmt. Durch eine spezielle Austauschsymmetrie in der auto-Bäcklundtransformation der sine-Gordon-Gleichung, läßt sich aus der Soliton-Soliton Lösung noch eine zweite Lösung der Newtonschen Gleichungen erzeugen, die einen einzelnen Puls beschreibt, der sich auf einem homogenen Hintergrund bewegt. Das besondere Merkmal ist, daß die Dichte in einer endlichen Zeit unendlich groß wird, was man normalerweise nur bei den Staub-Lösungen kennt. Aus der "breather"-Lösung der sine-Gordon-Gleichung (gebundener Zustand zweier Solitonen) ermittelt man eine Lösung, die zwei symmetrisch einlaufende Wellen beschreibt, die auf eine ruhende, zentrale Verdichtung kollabieren. Die Maxima der Dichteverteilung sind jeweils von Diskontinuitäten getrennt. Bedeutsam für die Physik selbstgravitierender Systeme sind die typisch nichtlinearen Relationen zwischen Amplitude und räumlicher Breite der Solitonen und die Phasenkopplung der Fouriermoden einer beliebigen Anfangsbedingung, die durch das asymptotische Verhalten hin zu einer Überlagerung von Solitonen für Unterschallströmungen zum Ausdruck kommt.

*Abschnitt 4* enthält ein Modell für den Gravitationskollaps in zwei Dimensionen. Die Rechtfertigung für diese Einschränkung auf 2-D kommt daher, daß man im Rahmen der Theorien der Strukturbildung allgemein an hochgradig anisotropen Bewegungen interessiert ist, da den einfach lösbaren Situationen, wie sphärische Symmetrie sicher keine generische Bedeutung zukommt (siehe die numerischen Simulationen in 2-D für "Staub" von Zeldovich 1983, Doroshkevich et al. 1980). In 2-D kann man die der 1-Soliton-Lösung in 1-D entsprechende Lösung ebenso explizit konstruieren. Durch eine konforme, zeitabhängige Transformation kann man eine Klasse erzeugen mit komplizierterer Zeitabhängigkeit und nicht-konstantem Geschwindigkeitsfeld. Eine besondere Eigenschaft dieser Modelle ist die Existenz von in der Zeit exponentiell anwachsenden Instabilitäten auf räumlichen Hyperflächen, deren Gestalt bestimmt ist durch die Randbedingungen für die Dichteverteilung. Diese Lösungen kann man als Modell für einen asymmetrischen Gravitationskollaps ansehen. Bemerkenswert ist, daß auch bei nicht-verschwindendem Gasdruck der Kollaps auf "pancake"-artige Strukturen möglich ist, was ja zunächst nur für druckfreie Materie gezeigt wurde.

In *Abschnitt 5* wird ein drei-dimensionales Modell diskutiert, das das 3-D Analogon zur 1-Soliton-Lösung in 1-D darstellt. Die Dichteverteilung hängt noch von einer frei wählbaren Funktion ab, die durch Randbedingungen bestimmt wird. Allerdings ist die Gesamtmasse dieser Materiekonfiguration ohne Symmetrie — wie bei der isothermen Gaskugel — unendlich. In *Abschnitt 5.2* wird für spezielle Beispiele gezeigt, daß diese Lösungsklasse Dichteverteilungen zuläßt, deren Flächen konstanter Dichte mehrfach zusammenhängend sind. Die topologische Struktur ist dabei unabhängig von der Längenskala.

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Untersuchungen selbstgravitierender Flüssigkeiten nicht nur in der Theorie der Galaxienentstehung anwendbar sind, sondern auch auf die Entwicklung von Systemen auf kleineren Skalen, wie z.B. das Problem der Fragmentierung einer Gaswolke als Vorstufe zur Sternentstehung (Elmgreen/Elmgreen 1978, Woodward 1978, Larson 1973b, Welter 1982, Tohline 1982, Larson 1985, Shu/Adams/Lizano 1987, Schmitz/Ebert 1987) oder die Dynamik des interstellaren Gases, für das die isotherme Zustandsgleichung eine realistische Annahme ist.

## 2. Ein exaktes Modell für den "pancake"-Kollaps

In diesem Abschnitt wird ein Modell für den hochgradig anisotropen Kollaps diskutiert, basierend auf einer exakten Lösung der Gleichungen (I.8) für  $p = 0$ , rotationsfreies Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  und zwei verschwindender Eigenwerte des Expansionstensors (Buchert/Götz 1987). Die Annahme  $p = 0$  ist gerechtfertigt, wenn man an der Strukturierung auf großen Skalen ("groß" nach  $z = 1000$  heißt groß im Vergleich zur Jeanslänge zu dieser Zeit) interessiert ist, auf die der Gasdruck keinen Einfluß mehr ausübt. Daß die Lösung für typische Längen  $l \ll l_{\text{Jeans}}$  unphysikalisch wird, zeigt sich an den Singularitäten in der Dichte, die nach endlicher Zeit entstehen und die nur durch Berücksichtigung von Druck oder Viskositäten beseitigt werden können. Die Annahme eines rotationsfreien Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$  rechtfertigt sich durch die Abwesenheit von großräumigen Rotationsbewegungen in Superhaufen und Haufen von Galaxien. Außerdem weiß man aus der linearen Störungstheorie kleiner Dichtefluktuationen, daß Moden mit nichtverschwindender Rotation stets abklingen. Das heißt, in den Zeiträumen, von denen hier die Rede ist ( $z < 1000$ ) würde selbst anfängliche Rotation keine wesentliche Rolle mehr spielen.

Die Annahme, die die größten Einschränkungen liefert, ist das Verschwinden zweier Eigenwerte des Expansionstensors. Gerechtfertigt ist diese durch die Argumente für die hochgradige Anisotropie des Gravitationskollaps in der Spätphase für beliebige Anfangsbedingungen (ausgenommen sphärische Symmetrie). Zwei verschwindende Eigenwerte ist natürlich eine Idealisierung dieser anisotropen Bewegung, die jedoch exakte Aussagen über die möglichen Dichteverteilungen zuläßt. In Paragraph 2.1. wird die exakte Lösung abgeleitet, 2.2. enthält die Diskussion der Dichteverteilung und der Hyperflächen maximaler Kontraktion

### 2.1. Die Lösung

Für die Behandlung des Systems (I.8) mit  $p = 0$  ist es zweckmäßig, von den Eulerkoordinaten  $\vec{x}$  auf Lagrangekoordinaten  $\vec{X}$  zu transformieren, wobei die Zeitkoordinate  $t$  ungeändert bleibt. Lagrangekoordinaten  $\vec{X}$  sind definiert als die "Markierungen" der Integralkurven  $x_i = f_i(\vec{X}, t)$  des Vektorfeldes  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ :

$$\frac{df_i}{dt} = v_i(f_j, t), \quad f_i(X_j, 0) = f_i(X_j) = X_i \quad (2.1)$$

die als Bahnen der Flüssigkeitselemente interpretiert werden, die sich zur Anfangszeit  $t = 0$  am Punkt  $X_i$  befinden.

Für eine beliebige Funktion  $F_i(x_j, t)$  wird die totale Zeitableitung längs der Teilchenbahnen zu einer partiellen Ableitung nach Transformation auf Lagrangekoordinaten:

$$\left. \frac{d\vec{F}}{dt} \right|_{\vec{X}=\text{const.}} \equiv \dot{\vec{F}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}(\vec{X}, t) \quad (2.2).$$

$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$  wird als ein Vektorfeld in der Lagrange-Beschreibung aufgefaßt, welches die Transformation zurück auf die Eulerkoordinaten bestimmt. Die Dynamik ist vollständig durch die Kenntnis von  $f_i$  bestimmt.

Die Ableitung der Abbildung  $x_i \mapsto X_i$  ist die Jacobi-Matrix

$$J_{ik}(\vec{X}, t) \equiv \frac{\partial f_i}{\partial X_k} \quad (2.3).$$

Die Transformation wird singulär, wenn die Determinante

$$J \equiv \det(J_{ik}) \quad (2.4)$$

verschwindet, was zum Schnittpunkt verschiedener Teilchenbahnen gehört.

Es gelten folgende Entwicklungsgleichungen für die Jacobi-Matrix und deren Determinante

$$\dot{J}_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} J_{jk} \quad (2.5a)$$

$$\dot{J} = \nabla \cdot \vec{v} J \quad (2.5b).$$

Über doppelte auftretende Indizes wird summiert und ein Komma bedeutet im folgenden stets partielle Ableitung nach Lagrangekoordinaten  $X_i$ .

Die Kontinuitätsgleichung (I.8a) läßt sich damit schreiben als

$$\frac{d\rho}{dt} + (\nabla \cdot \vec{v}) \rho = \dot{\rho} + \frac{\dot{J}}{J} \rho = 0 \quad (2.6).$$

Integration von (2.6) ergibt:

$$\rho = \frac{\rho_0(\vec{X})}{J} \quad (2.7)$$

wobei  $\rho_0(\vec{X})$  eine beliebige Anfangsdichteverteilung ist (es gilt  $J = 1$  bei  $t = 0$  wegen (2.1)).

Die Euler-Gleichungen (I.8b) lauten in Lagrangekoordinaten einfach

$$g_i = \dot{v}_i = \dot{f}_i \quad (2.8)$$

und die Rotationsfreiheit von  $\vec{g}$ , (I.8c), zusammen mit der Poisson-Gleichung (I.8d) ergibt:

$$g_{i,k} J_{kj}^{-1} = g_{j,k} J_{ki}^{-1} \quad (i \neq j) \quad (2.9a)$$

$$g_{i,k} J_{ki}^{-1} = -\rho \quad (2.9b)$$

wobei  $J_{ij}^{-1}$  die inverse Jacobi-Matrix bezeichnet.

(2.7) und (2.8) eingesetzt in (2.9) ergibt ein System von vier Gleichungen für die Jacobi-Matrix

$$\tilde{J}_{ik} J_{kj}^{-1} = \tilde{J}_{jk} J_{ki}^{-1} \quad (i \neq j) \quad (2.10a)$$

$$\tilde{J}_{ik} J_{ki}^{-1} = -\frac{\rho_0}{J} \quad (2.10b).$$

Bezeichnet man die Funktionaldeterminante von drei beliebigen Funktionen  $h_1(\vec{X}, t)$ ,  $h_2(\vec{X}, t)$ ,  $h_3(\vec{X}, t)$  mit

$$D(h_1, h_2, h_3) \equiv \frac{\partial(h_1, h_2, h_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \quad (2.11)$$

dann läßt sich das System (2.10) in folgende endgültige Form bringen:

$$\epsilon_{pq[j} D(\tilde{f}_i], f_p, f_q) = 0 \quad (2.12a)$$

$$\epsilon_{abc} D(\tilde{f}_a, f_b, f_c) = -\rho_0 \quad (2.12b).$$

Dies ist ein System von Gleichungen für die Abbildung  $f_i(X_j, t)$ , dessen Lösungen sämtliche Lösungen des Systems (I.8) erzeugen. Hat man von (2.12) eine Lösung, so lassen sich die ursprünglichen physikalischen Größen daraus berechnen:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J} = \frac{\rho_0}{D(f_1, f_2, f_3)} \quad (2.13a)$$

$$v_i = \dot{f}_i \quad (2.13b)$$

$$g_i = \tilde{f}_i \quad (2.13c).$$

Die Rücktransformation auf Eulerkoordinaten gewinnt man durch Auflösung von  $x_i = f_i(X_j, t)$  nach  $X_j$ . Die Form der Gleichungen (2.12) ist die Grundlage folgender Untersuchungen, bei denen die anfangs erwähnten Restriktionen den Lösungen von (2.12) auferlegt werden.

Um eine anschauliche Darstellung von der Bewegung eines Flüssigkeitselements zu bekommen, ist es zwäckmäßig *kinematische Variable (Rotation, Scherung und Expansion)* einzuführen (siehe Ellis 1971). Der Geschwindigkeitsgradient läßt sich wie folgt zerlegen:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \omega_{ij} + \theta_{ij} = \omega_{ij} + \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \theta \quad (2.14)$$

mit

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \equiv \partial_{[i} v_{j]} \quad (2.15a)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \equiv \partial_{(i} v_{j)} \quad (2.15b).$$

$\sigma_{ij}$  ist der spurfreie Anteil von  $\theta_{ij}$  und  $\theta = \text{trace}(\theta_{ij})$ ,  $\delta_{ij}$  ist das gewöhnliche Kronecker-Symbol für die Einheitsmatrix in drei Dimensionen. Der antisymmetrische Anteil  $\omega_{ij}$  beschreibt die bloße Rotation eines bestimmten Volumenelementes,  $\sigma_{ij}$  eine volumenerhaltende Deformation und  $\theta$  die bloße Volumenänderung. Mittels (2.5a) lassen sich diese Größen natürlich auch durch  $J_{ij}$  ausdrücken:

$$\omega_{ij} = \dot{J}_{[ik} J_{kj]}^{-1} \quad (2.16a)$$

$$\theta_{ij} = \dot{J}_{(ik} J_{kj]}^{-1} \quad (2.16b).$$

Die Eigenvektoren von  $\theta_{ij}$  definieren ein Achsensystem in jedem Flüssigkeitselement, wobei die Längenänderung entlang einer Achse beschrieben wird durch den dazugehörigen Eigenwert. Die Folgerungen aus der Annahme zweier verschwindender Eigenwerte von  $\theta_{ij}$  sind am einfachsten abzulesen, wenn man ein Flüssigkeitselement —markiert durch  $X'_j$ — betrachtet und bei  $t = 0$  ein Koordinatensystem festlegt, so daß die Koordinatenachsen mit den Eigenrichtungen des Expansionstensors am Ort des Teilchens zusammenfallen. Sei

$$\vec{\gamma} : t \mapsto f_i(X'_j, t)$$

die Teilchenbahn, dann kann man zeigen, daß für  $\omega_{ij} = 0$  dieses Achsensystem entlang  $\vec{\gamma}$  nicht rotiert. Die Transportgleichung für einen Verbindungsvektor  $n_i$  von Teilchen lautet nämlich (Ellis 1971):

$$\dot{n}_j = n_k (\omega_{jk} + \sigma_{jk} - (\sigma_{ab} n_a n_b) \delta_{jk}) \quad (2.17).$$

Ist nun  $\omega_{ij} = 0$  und  $n_i$  ein Eigenvektor zu  $\theta_{ij}$  und damit auch Eigenvektor von  $\sigma_{ij}$ , dann gilt

$$\dot{n}_j = 0 \quad (2.18)$$

das heißt, die Eigenvektoren von  $\theta_{ij}$  bleiben unverändert längs  $\vec{\gamma}$ , wenn der Fluß rotationsfrei ist. Dies gilt für beliebiges  $\vec{\gamma}$ . Das bedeutet, wenn  $\theta_{ij}$  bei  $t = 0$  diagonal ist, dann bleibt es diagonal längs  $\vec{\gamma}$ , wobei natürlich die Transformation auf Hauptachsen noch von  $\vec{\gamma}$  abhängt. Ist  $\theta_{ij}$  global diagonal, so ist die resultierende Lösung homogen ( $\nabla \rho = 0$ ).

Die Gleichung (2.5a) ergibt für  $J_{ij}$  wenn  $\theta_{ij} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  diagonal ist:

$$J_{ij}|_{\vec{\gamma}} = C_{ij}(\vec{X}) \exp \left( \int_0^t \theta_i dt \right) |_{\vec{\gamma}}, \quad (\text{keine Summation über } i) \quad (2.19).$$

Wobei die  $C_{ij}(\vec{X})$  beliebig sind. Wegen der Anfangsbedingung

$$J_{ij}|_{t=0} = \delta_{ij}$$

folgt

$$C_{ij}(\vec{X}) = \delta_{ij}.$$

Das heißt, wenn  $\theta_{ij}$  diagonal ist längs  $\vec{\gamma}$ , so ist auch  $J_{ij}$  diagonal längs  $\vec{\gamma}$ . Deshalb sind die Gleichungen (2.10a) identisch erfüllt längs  $\vec{\gamma}$  und Gleichung (2.10b) lautet:

$$(\tilde{J}_{11}J_{22}J_{33} + \tilde{J}_{22}J_{33}J_{11} + \tilde{J}_{33}J_{22}J_{11})|_{\vec{\gamma}} = -\rho_0|_{\vec{X}=\vec{X}'} \quad (2.20).$$

Sind nun zwei Eigenwerte von  $\theta_{ij}$  gleich Null, das heißt längs  $\vec{\gamma}$

$$\theta_{22}(\vec{X} = \vec{X}', t) = \theta_{33}(\vec{X} = \vec{X}', t) = 0 \quad (2.21),$$

so folgt aus (2.19)

$$J_{22}|_{\vec{\gamma}} = J_{33}|_{\vec{\gamma}} = 1 \quad (2.22)$$

und mit (2.20) ergibt sich

$$\tilde{J}_{11}|_{\vec{\gamma}} = -\rho_0(\vec{X}') \quad (2.23).$$

Da  $\dot{\rho}_0 = 0$  ist, folgt

$$\ddot{J}_{11} = 0 \leftrightarrow \ddot{f}_{1,1} = 0 \quad (2.24).$$

Die Beschleunigung  $g_i = \ddot{f}_i$  muß damit längs jeder Teilchenbahn eine Konstante sein. Da die Transformation auf beliebige Achsensysteme linear ist, folgt aus der Konstanz von  $g_i$  längs jeder Teilchenbahn, daß  $f_i$  höchstens ein Polynom 2. Ordnung in  $t$  sein kann.

**Satz 1:** Die Teilchenbahn der allgemeinen Lösung von (I.8) unter den Annahmen  $p = 0$ ,  $\nabla_{\vec{x}} \times \vec{v} = 0$  und zweier verschwindender Eigenwerte des Expansionstensors  $\theta_{ij}$ , ist gegeben durch:

$$x_i = f_i(X_j, t) = X_i + \check{v}_i(\vec{X})t + \frac{1}{2}\check{g}_i(\vec{X})t^2 \quad (2.25)$$

wobei  $\check{v}_i, \check{g}_i$  die Anfangsverteilungen von  $v_i, g_i$  bei  $t = 0$  sind, die noch durch die Gleichungen (2.12) eingeschränkt werden.

**Beweis:** folgt aus den obigen Erklärungen. ♠

Im übrigen ist  $\dot{g}_i = 0$  eine allgemeine Eigenschaft der 1-D Lösung von (I.8) für  $p = 0$ . Denn, das ursprüngliche System (I.8) lautet für eindimensionale Bewegungen

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0 \quad (2.26a)$$

$$g_x = -\rho \quad (2.26b)$$

woraus sich

$$g_t + vg_x = \dot{g} = \beta(t) \quad (2.26c)$$

ergibt ( $\beta$  ist beliebig). Wegen der sogenannten "Heckmann-Schücking" Kovarianz (Heckmann/Schücking 1955/1956) von (I.8) kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\beta = 0$  wählen, woraus  $\dot{g} = 0$  folgt.

Im weiteren gilt es noch die Restriktionen für  $\check{v}_i, \check{g}_i$  anzugeben, die aus (2.12) folgen. Einsetzen von (2.25) in das System (2.12) ergibt Polynome in  $t$ , deren sämtliche Koeffizienten, die durch  $\check{v}_i, \check{g}_i$  bestimmt sind, verschwinden müssen. Die resultierenden 17 Gleichungen lauten:

$$t^0 : D(\check{g}_k, \check{f}_k, \check{f}_i) = D(\check{g}_j, \check{f}_i, \check{f}_j) \quad (2.27a)$$

$$t^1 : D(\check{g}_k, \check{v}_k, \check{f}_i) + D(\check{g}_k, \check{f}_k, \check{v}_i) = D(\check{g}_j, \check{f}_i, \check{v}_j) + D(\check{g}_j, \check{v}_i, \check{f}_j) \quad (2.27b)$$

$$t^2 : D(\check{g}_k, \check{v}_k, \check{v}_i) + \frac{1}{2}D(\check{g}_k, \check{f}_k, \check{g}_i) = D(\check{g}_j, \check{v}_i, \check{v}_j) + \frac{1}{2}D(\check{g}_j, \check{g}_i, \check{f}_j) \quad (2.27c)$$

$$t^3 : D(\check{g}_k, \check{v}_k, \check{g}_i) = D(\check{g}_j, \check{g}_i, \check{v}_j) \quad (2.27d)$$

In (2.27) darf *nicht* über wiederholt auftretende Indizes summiert werden;  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $i, j, k$  paarweise verschieden.  $\check{f}_i$  bedeutet einfach  $f_i(\vec{X}, 0) = \check{f}_i = X_i$ .

$$t^0 : \epsilon_{ijk} D(\check{g}_i, \check{f}_j, \check{f}_k) = -\rho_0 \quad (2.28a)$$

$$t^1 : \epsilon_{ijk} (D(\check{g}_i, \check{f}_j, \check{v}_k) + D(\check{g}_i, \check{v}_j, \check{f}_k)) = 0 \quad (2.28b)$$

$$t^2 : \epsilon_{ijk} (D(\check{g}_i, \check{f}_j, \check{g}_k) + D(\check{g}_i, \check{v}_j, \check{v}_k)) = 0 \quad (2.28c)$$

$$t^3 : \epsilon_{ijk} D(\check{g}_i, \check{g}_j, \check{v}_k) = 0 \quad (2.28d)$$

$$t^4 : D(\check{g}_1, \check{g}_2, \check{g}_3) = 0 \quad (2.28e)$$

In (2.28) gilt Summation über wiederholt auftretende Indizes;  $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{[ijk]}$ ,  $\epsilon_{123} = 1$ .

Jeder von den Ausdrücken (2.27a,b,c,d) ergibt drei Gleichungen, während (2.28) insgesamt fünf Gleichungen liefert. (2.27) entsteht aus (2.12a) bzw. (2.10a) mittels (2.25)

und (2.28) entsteht aus (2.12b) bzw. (2.10b) durch Einsetzen von (2.25). (2.27a) ist nichts anderes als die Rotationsfreiheit von  $g_i$  bei  $t = 0$

$$\nabla_{\vec{X}} \times \check{\vec{g}} = 0$$

und (2.28a) ist die Poisson-Gleichung bei  $t = 0$

$$\nabla_{\vec{X}} \cdot \check{\vec{g}} = -\rho_0 .$$

**Lemma 1:** Die 17 Gleichungen (2.27), (2.28) für die sechs Funktionen  $\check{v}_i, \check{g}_i$  sind dann und nur dann erfüllt, wenn gilt:

$$\check{v}_1 = F(\check{g}_1), \check{v}_2 = H(\check{g}_1), \check{v}_3 = K(\check{g}_1) \quad (2.29a)$$

$$\check{g}_1 = E(X_1 + A' X_2 + B' X_3), \check{g}_2 = A(\check{g}_1), \check{g}_3 = B(\check{g}_1) \quad (2.29b)$$

$$F' A' = H', F' B' = K' \quad (2.29c)$$

wobei  $F, H, K, A, B, E$  beliebige Funktionen eines Arguments sind.

" ' " bedeutet die Ableitung nach dem jeweiligen Argument. Die Wahl der funktionalen Abhängigkeit von  $\check{g}_1$  ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit getroffen. Der Zusammenhang zwischen  $\rho_0$  und  $F, H, K, A, B, E$  ist durch (2.28a) gegeben. (2.29c) drückt die Rotationsfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes aus.

**Beweis von Lemma 1:** Beginnt man mit Gleichung (2.28e), bekommt man eine funktionale Beziehung zwischen  $\check{g}_1, \check{g}_2, \check{g}_3$ , die lokal aufgelöst werden kann

$$\check{g}_3 = \Psi_0(\check{g}_1, \check{g}_2) \quad (2.30)$$

wobei  $\Psi_0$  beliebig ist. Addiert man bestimmte Linearkombinationen der drei Gleichungen (2.27d) zu (2.28d) ergibt sich unter Benutzung von (2.30)

$$D(\check{g}_1, \check{g}_2, \check{v}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.31).$$

(2.31) impliziert drei funktionale Beziehungen zwischen  $\check{g}_1, \check{g}_2, \check{v}_i$ , die wiederum lokal z.B. nach  $\check{v}_i$  aufgelöst werden können:

$$\check{v}_i = \Psi_i(\check{g}_1, \check{g}_2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

Die  $\Psi_i$  sind beliebig.

Die Annahme, daß (2.32) die Lösung von (2.31) ist, ist nur eine schwache Restriktion, da es alles folgende nicht wesentlich ändern würde, wenn die Gleichung (2.31) nicht nach  $\check{v}_i$  auflösbar wäre an einem bestimmten Punkt im  $(\check{g}_1, \check{g}_2, \check{v}_i)$ -Raum, sondern nach  $\check{g}_1$  oder  $\check{g}_2$ .

Linearkombinationen von (2.27c) zu (2.28c) addiert, ergeben zusammen mit (2.30), (2.31), (2.32):

$$D(\check{g}_1, \check{g}_2, \check{f}_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.33).$$

Aus (2.33) leitet man für  $i = 3$  mit Hilfe von (2.27a) eine Differentialgleichung für  $\check{g}_1$  ab

$$\check{g}_{1,1}\check{g}_{2,2} - \check{g}_{1,2}^2 = 0 \quad (2.34)$$

deren lokale Lösung lautet:

$$\check{g}_2 = A(\check{g}_1) \quad (2.35a)$$

mit einer beliebigen Funktion A.

Dann können (2.30) und (2.32) wie folgt geschrieben werden:

$$\check{g}_3 = B(\check{g}_1) \quad (2.35b)$$

$$\check{v}_1 = F(\check{g}_1) \quad (2.35c)$$

$$\check{v}_2 = H(\check{g}_1) \quad (2.35d)$$

$$\check{v}_3 = K(\check{g}_1) \quad (2.35e)$$

wobei B, F, H, K beliebig sind.

Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß die verbleibenden Gleichungen (2.27b) und (2.28b) identisch erfüllt sind, wenn (2.35) gilt.

Gleichungen (2.27a) implizieren unter Benutzung von (2.35a) und (2.35b):

$$A'(\check{g}_1)\check{g}_{1,1} = \check{g}_{1,2} \quad (2.36a)$$

$$B'(\check{g}_1)\check{g}_{1,1} = \check{g}_{1,3} \quad (2.36b).$$

Diese Differentialgleichungen (2.36) sind äquivalent zu

$$\frac{d\check{g}_1}{dX_2} = 0 \quad (2.37a)$$

$$\frac{d\check{g}_1}{dX_3} = 0 \quad (2.37b)$$

auf den Kurven

$$\frac{dX_1}{dX_2} = -A' \quad (2.38a)$$

$$\frac{dX_1}{dX_3} = -B' \quad (2.38b).$$

Da  $\check{g}_1$  konstant ist auf diesen Kurven, ergibt die Integration von (2.38a, b):

$$X_1 + A'X_2 + B'X_3 \equiv \xi = \text{const.} \quad (2.39).$$

Damit ist  $\check{g}_1$  eine beliebige Funktion von  $\xi$ :

$$\check{g}_1 = E(\xi) \quad (2.40).$$

(2.29c) ergeben sich einfach durch Einsetzen von (2.29a) in

$$\nabla_{\vec{X}} \times \check{v}_i = 0$$

da gemäß dem Kelvin-Helmholtz-Theorem die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes für alle Zeiten verschwindet, wenn sie bei  $t = 0$  verschwindet.

(2.35c,d,e) sind nichts anderes als (2.29a); (2.39),(2.40) und (2.35a,b) sind identisch mit (2.29b). ♠

Da  $\nabla_{\vec{x}} \times \vec{g} = 0$  die Existenz eines Potentials  $\check{\Phi}$  garantiert

$$\vec{g}(\vec{X}, t) = \vec{g}(\vec{X}, 0) = -\nabla_{\vec{X}} \check{\Phi}(\vec{X}) \quad (2.41)$$

kann man die funktionale Abhängigkeit der Komponenten des Vektors  $\check{g}_i$  auch anders formulieren:

**Lemma 2:** (2.29b) ist genau dann erfüllt, wenn das in (2.41) definierte Potential  $\check{\Phi}$  bestimmt ist durch:

$$\check{\Phi}_{,2,2}\check{\Phi}_{,3,3} - \check{\Phi}_{,2,3}^2 = 0 \quad (2.42a)$$

$$\check{\Phi}_{,3,3}\check{\Phi}_{,1,1} - \check{\Phi}_{,3,1}^2 = 0 \quad (2.42b)$$

$$\check{\Phi}_{,1,1}\check{\Phi}_{,2,2} - \check{\Phi}_{,1,2}^2 = 0 \quad (2.42c).$$

Beweis von Lemma 2: durch Einsetzen von (2.29b) in (2.27a). ♠

**Lemma 3:** Die allgemeine lokale Lösung der überbestimmten Gleichungen (2.42) für  $\check{\Phi}$  ist gegeben durch:

$$\check{\Phi} = \alpha X_1 + A(\alpha)X_2 + B(\alpha)X_3 + C(\alpha) \quad (2.43a)$$

$$0 = X_1 + A'(\alpha)X_2 + B'(\alpha)X_3 + C'(\alpha) \quad (2.43b)$$

mit  $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$  beliebig.

**Beweis von Lemma 3:** Die Gleichungen (2.43) sind eine Erweiterung der Darstellung von Lösungen der Gleichung  $Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = 0$  für Flächen  $Z(x, y)$  mit verschwindender Gaußkrümmung, wie sie in Courant/Hilbert (1968) angegeben wird.

Man hat zu zeigen, daß die Hyperflächen  $\check{\Phi}$ , die durch (2.43) gegeben sind, eine Darstellung geben für jede lokale Lösung der Gleichungen (2.42). (2.42) implizieren die Existenz von Funktionen  $A, B$ , so daß

$$\check{\Phi}_{,2} = A(\check{\Phi}_{,1}) \quad (2.44a)$$

$$\check{\Phi}_{,3} = B(\check{\Phi}_{,1}) \quad (2.44b)$$

gilt (siehe Courant/Hilbert (1968)). Definiert man eine Funktion  $C$  durch

$$\begin{aligned} C &\equiv \check{\Phi} - \check{\Phi}_{,1}X_1 - \check{\Phi}_{,2}X_2 - \check{\Phi}_{,3}X_3 \\ &= \check{\Phi} - \alpha X_1 - A(\alpha)X_2 - B(\alpha)X_3 \end{aligned} \quad (2.45)$$

so kann man zeigen, daß  $C$  nur funktional von  $\alpha$  abhängt: Die notwendige und hinreichende Bedingung für zwei Funktionen  $C$  und  $\alpha$ , funktional abhängig zu sein, ist das Verschwinden aller Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} C_{,1} & C_{,2} & C_{,3} \\ \alpha_{,1} & \alpha_{,2} & \alpha_{,3} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

das heißt:

$$C_{,2}\alpha_{,3} - C_{,3}\alpha_{,2} = 0 \quad (2.47a)$$

$$C_{,1}\alpha_{,3} - C_{,3}\alpha_{,1} = 0 \quad (2.47b)$$

$$C_{,1}\alpha_{,2} - C_{,2}\alpha_{,1} = 0 \quad (2.47c).$$

Setzt man (2.45) in (2.47) ein, dann sieht man, daß (2.47) stets erfüllt ist für jedes  $\check{\Phi}$ , das (2.44) genügt.

Da  $C$  nur von  $\alpha$  abhängt, ergibt sich aus (2.45):

$$d\check{\Phi} = \alpha dX_1 + A dX_2 + B dX_3 + (X_1 + A'X_2 + B'X_3 + C') d\alpha \quad (2.48)$$

was wiederum impliziert

$$0 = X_1 + A'X_2 + B'X_3 + C' \quad (2.49).$$

(2.45) und (2.49) sind identisch mit (2.43a), (2.43b). (2.49) ist ebenso identisch mit (2.40), wenn man

$$-C'(\alpha) = E^{-1}(\alpha)$$

setzt. ♠

Zusammenfassend ergibt sich dann die Lösung unter den in *Satz 1* gemachten Voraussetzungen:

**Satz 2:** Die allgemeine, lokale Lösung von (I.8) unter den Voraussetzungen

$$i) p = 0$$

$$ii) \omega_{ij} = 0$$

$$iii) \text{ zwei Eigenwerte von } \theta_{ij} \text{ sind Null}$$

ist gegeben durch:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + F'\rho_0 t - \frac{1}{2}\rho_0 t^2} \quad (2.50a)$$

$$\rho_0 = \frac{-(1 + A'^2 + B'^2)}{A''X_2 + B''X_3 + C''} \quad (2.50b)$$

$$v_1 = F(\alpha) - \alpha t \quad (2.51a)$$

$$v_2 = H(\alpha) - A(\alpha) t \quad (2.51b)$$

$$v_3 = K(\alpha) - B(\alpha) t \quad (2.51c)$$

$$g_1 = -\alpha \quad (2.52a)$$

$$g_2 = -A(\alpha) \quad (2.52b)$$

$$g_3 = -B(\alpha) \quad (2.52c)$$

mit

$$H' = F' A' \quad (2.53a)$$

$$K' = F' B' \quad (2.53b)$$

$$x_1 = X_1 + Ft - \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2.54a)$$

$$x_2 = X_2 + Ht - \frac{1}{2} A t^2 \quad (2.54b)$$

$$x_3 = X_3 + Kt - \frac{1}{2} B t^2 \quad (2.54c)$$

$$0 = X_1 + A'X_2 + B'X_3 + C' \quad (2.55)$$

Beweis: folgt aus *Satz 1, Lemma 1, 2, 3.* ♠

Eine spezielle Lösung erhält man nun durch Wahl der freien Funktionen  $A, B, C, F$ . (2.55) bestimmt dann  $\alpha(X_1, X_2, X_3)$  und  $H, K$  sind durch (2.53) gegeben. Die Transformation auf Eulerkoordinaten  $\vec{x}$  ist bestimmt durch Inversion von (2.54).

Die Dichte  $\rho_0$  muß positiv sein für alle  $X_i$ , was eine Wahl von  $A, B, C$  impliziert, so daß

$$A''X_2 + B''X_3 + C'' < 0 \quad (2.56)$$

gilt. Dies ist möglich für den 1-D Fall. Deshalb können die 3-D Lösungen diese Eigenschaft zumindest in einer kleinen Nachbarschaft der Untermannigfaltigkeit im  $(A, B, C)$ -Raum haben, die die eben-symmetrische Lösung mit  $\rho_0 \geq 0$  erzeugt. Bemerkenswert an der in *Satz 2* gegebenen Lösung ist, daß sie *keine Symmetrie* aufweist.

Schließlich sei angemerkt, daß die in *Satz 2* bestimmte Lösung die allgemeine 1-D-Lösung enthält: Für  $\check{v}_2 = \check{v}_3 = 0 \Leftrightarrow H' = K' = 0 \Leftrightarrow A' = B' = 0$  bleiben nur noch  $C$  und  $F$  als frei wählbare Funktionen übrig. (2.55) zeigt, daß  $\alpha$  nur noch eine Funktion von  $X_1$  ist. Damit sind

$$\rho_0 = \frac{-1}{C''}, \text{ und } v_1 = F$$

beliebige Funktionen von  $X_1$ , was die maximal mögliche Freiheit in der Wahl der Anfangsbedingungen im 1-D Fall darstellt (siehe auch Novikov 1970).

Die Lösung aus *Satz 2* ist solange physikalisch interpretierbar als

$$J = 1 + \rho_0 (F' t - \frac{1}{2} t^2) \neq 0 \quad (2.57)$$

gilt. Zum Zeitpunkt  $t_c$  für den  $J(t = t_c) = 0$  ist

$$t_c = F' \pm \frac{1}{\rho_0} \sqrt{(\rho_0 F')^2 + 2\rho_0} \quad (2.58)$$

läuft das entsprechende Teilchen in eine Fläche unendlich hoher Dichte, die bestimmt sind als die Schnittpunkte aller Teilchenbahnen. Für  $\rho_0 \geq 0$  ist  $t_c$  stets reell, d.h. *jedes* Teilchen trifft nach endlicher Zeit auf eine Fläche wo  $\rho \rightarrow \infty$ . Für verschwindendes anfängliches Geschwindigkeitsfeld  $F' = 0$  ist

$$t_c = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}$$

einfach die freie Fallzeit.

Man kann zeigen, daß die Entstehung von singulären Hyperflächen in endlicher Zeit eine allgemeine Eigenschaft jeder Lösung von (I.8) mit  $p = 0$  und  $\omega_{ij} = 0$  ist (Ellis 1971).

In der "pancake" Theorie werden die Hyperflächen  $J = 0$  ("Kaustriken") mit den großräumigen Strukturelementen der Galaxienverteilung assoziiert, wie z.B. der filamentartigen Anordnung der Superhaufen. Die Schnittpunkte von verschiedenen "pancakes" könnten bevorzugte Orte der Entstehung von Galaxien sein.

Einen besseren Einblick in das Verhalten eines Flüssigkeitselements bekommt man aus den kinematischen Variablen  $\theta_{ij}$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_{ij}$ , die für die Lösung (2.50)....(2.55) lauten:

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \frac{t - F'}{J(A''X_2 + B''X_3 + C'')} \\ \theta_{22} &= A'^2 \theta_{11}, \quad \theta_{33} = B'^2 \theta_{11} \\ \theta_{12} &= A' \theta_{11}, \quad \theta_{13} = B' \theta_{11}, \quad \theta_{23} = A'B' \theta_{11} \end{aligned} \quad (2.59a)$$

$$\theta = (F' - t) \frac{\rho_0}{J} = \rho(F' - t) \quad (2.59b)$$

$$\sigma_{ij} = \theta_{ij} - \frac{1}{3} \rho(F' - t) \delta_{ij} \quad (2.59c)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma^{ij} = \frac{1}{4 J^2} [v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2 + v_{3,3}^2] \quad (2.59d).$$

$\sigma^2$  ist ein mittleres Maß für den Grad der Anisotropie des Gravitationskollaps. Selbst für die Anfangsbedingung  $\dot{v}_i = 0 \Rightarrow F' = 0$  für die  $\sigma^2 = 0$  ist, wird  $\sigma^2 \neq 0$  für  $t > 0$  da  $v_i \neq 0$  für  $t > 0$ .

$\theta$  mißt die Rate, mit der sich das Volumen eines Flüssigkeitselements ändert. Für  $\dot{v}_i = 0$  ( $F' = 0$ ) ist  $\theta < 0$  für  $t > 0$ , das heißt das Volumen kontrahiert für  $t > 0$ . Nur für  $F' > 0$  ist  $\theta > 0$  in einem Zeitintervall  $0 \leq t \leq F' \equiv t_u$ . Der Kollaps kann aber nicht verhindert werden, da für  $t > t_u$   $\theta$  stets negativ wird.  $t_u$  ist ein Umkehrzeitpunkt, zu

dem eine anfängliche Expansion in Kontraktion umschlägt; ein Verhalten wie es auch an der sphärisch-symmetrischen Lösung abzulesen ist (Peebles 1980).

Zum Schluß sei bemerkt, daß es auch möglich ist eine ähnliche Lösung mit Rotation zu erzeugen, wenn man einfach (2.25) als ad-hoc-Ansatz für die Teilchenbahnen  $f_i$  benutzt und in die Gleichungen (2.12) einsetzt. Man bekommt daraus Beschränkungen für  $\check{v}_i, \check{g}_i$  wie in (2.29a), (2.29b). (2.29c) fällt weg. Lemma 2 ist ebenso gültig und in Satz 2 fallen nur (2.53a,b) weg, ansonsten ist die Gestalt von Dichte und Geschwindigkeitsfeld identisch. Die Freiheit in der Wahl der Anfangsbedingungen erhöht sich auf sechs Funktionen A, B, C, F, H, K statt vier im rotationsfreien Fall. Der Expansionstensor hat zwei nichtverschwindende Eigenwerte, die jeweils entgegengesetztes Vorzeichen haben. Der Rotationsvektor ist ein Eigenvektor des Expansionstensors zum Eigenwert Null. Trotz der nichtverschwindenden Rotation läuft jedes Teilchen nach endlicher Zeit in eine Hyperfläche unendlich hoher Dichte, der Kollaps wird also auch dadurch nicht verhindert. Für weitere Einzelheiten siehe Buchert/Götz 1987.

## 2.2. Niveauflächen, Flächen maximaler Kontraktion

Ein anschauliches Bild von der dreidimensionalen Dichteverteilung bekommt man durch Untersuchung der Flächen konstanter Dichte (*Niveauflächen*). Als zwei-dimensionale Hyperflächen sind sie zu jedem Zeitpunkt  $t$  gegeben durch

$$\rho = \frac{-(1 + A'^2 + B'^2)}{J(A''X_2 + B''X_3 + C'')} = \text{const.} \quad (2.60)$$

zusammen mit den Formeln (2.54), (2.55), die die Rücktransformation auf die Eulerkoordinaten bestimmen. (2.60) ist aufzufassen als eine implizite Darstellung einer Fläche in Eulerkoordinaten:

$$\rho(x, y, z, t) - \text{const.} \equiv F(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.61).$$

Durch lokale Auflösung von (2.61) z.B. nach  $x$  erhält man eine Schar von Hyperflächen

$$x = f(y, z, t) \quad (2.62)$$

wobei die Koordinaten auf der Fläche  $y, z$  sind und  $t$  der Scharparameter.

Um die nachfolgenden Berechnungen der Krümmung der Niveauflächen zu vereinfachen, ist es zweckmäßig (2.60) in anderer Form auszudrücken. Aus (2.55) sieht man, daß die Ableitungen der Funktion  $\alpha(\vec{X})$  gegeben sind durch:

$$\alpha_{,X} = \frac{-1}{A''X_2 + B''X_3 + C''} \quad (2.63a)$$

$$\alpha_{,Y} = A' \alpha_{,X}, \quad \alpha_{,Z} = B' \alpha_{,X} \quad (2.63b).$$

Mittels (2.54) erhält man für die Ableitungen von  $\alpha$  nach den Eulerkoordinaten nun aufgefaßt als Funktion von  $\vec{x}, t$ :

$$\alpha_{,x} = \frac{\alpha_{,X}}{J}, \quad \alpha_{,y} = A' \alpha_{,x}, \quad \alpha_{,z} = B' \alpha_{,x} \quad (2.64).$$

Daraus kann man ablesen, daß sich (2.60) darstellen läßt als:

$$\rho = (1 + A'^2 + B'^2) \alpha_{,x} = \text{const.} \quad (2.65).$$

Definiert man eine Funktion  $M(\alpha)$  durch

$$\frac{dM}{d\alpha} = M' \equiv 1 + A'^2 + B'^2 \quad (2.66)$$

so lassen sich die Niveauflächen darstellen durch die Gleichung

$$M_x - \text{const.} = M' \alpha_x - \text{const.} \equiv F(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.67).$$

Die Bedeutung von  $M(\alpha)$  wird ersichtlich aus der Berechnung der Gesamtmasse eines bestimmten Volumenelements für die Dichte (2.50):

$$\begin{aligned}\int \rho \, dx \, dy \, dz &= \int M' \alpha_x \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int M' \, d\alpha \, dy \, dz = \quad \cdot \\ &= M(\alpha) \int dy \, dz\end{aligned}\tag{2.68}$$

wobei benutzt wurde, daß die Jacobideterminante der Transformation  $(x, y, z) \leftrightarrow (\alpha, y, z)$

$$\frac{\partial(\alpha, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \alpha_x$$

ist.  $M$  ist somit die Masse pro Oberflächenelement der  $(y, z)$ -Ebenen.

Die koordinateninvariante Information über die Krümmungsverhältnisse einer Fläche ist enthalten in den beiden Hauptkrümmungen oder —äquivalent dazu— in der *mittleren Krümmung*  $K_m$  und der *Gaußkrümmung*  $K_g$  (Blaschke/Leichtweiß 1973, Carmo 1983, Dubrovin et al. 1984). Für eine Fläche in der Darstellung (2.62) sind sie gegeben durch:

$$K_g = f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2 \tag{2.69a}$$

$$K_m = (1 + f_y^2)f_{zz} + (1 + f_z^2)f_{yy} - 2f_yf_zf_{yz} \tag{2.69b}.$$

Normalerweise werden  $K_g$ ,  $K_m$  in der Literatur definiert mit einem zusätzlichen Faktor

$$K_g \rightarrow K_g (1 + f_y^2 + f_z^2)^{-2}$$

$$K_m \rightarrow K_m (1 + f_y^2 + f_z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

versehen. Die Vorzeicheninformation enthält aber bereits (2.69), weshalb im folgenden der Einfachheit halber die Ausdrücke (2.69) verwendet werden.

Für die implizite Darstellung (2.61) bzw. (2.67) sind die entsprechenden Ausdrücke etwas komplizierter:

$$\begin{aligned}K_g &= \frac{1}{F_x^4} \left[ 2F_yF_z(F_{xy}F_{zz} - F_{xz}F_{yz}) + 2F_yF_x(F_{xz}F_{yz} - F_{xy}F_{zz}) \right. \\ &\quad + 2F_zF_x(F_{yz}F_{xy} - F_{xz}F_{yy}) + F_y^2(F_{xz}F_{zz} - F_{xz}^2) \\ &\quad \left. + F_z^2(F_{xz}F_{yy} - F_{zy}^2) + F_x^2(F_{yy}F_{zz} - F_{yz}^2) \right]\end{aligned}\tag{2.70a}$$

$$K_m = \frac{1}{F_x} \left[ 2F_x F_y F_{xy} + 2F_x F_z F_{xz} + 2F_y F_z F_{yz} \right. \\ \left. - (F_y^2 + F_z^2) F_{xx} - (F_x^2 + F_y^2) F_{yy} - (F_x^2 + F_y^2) F_{zz} \right] \quad (2.70b).$$

Mit  $F(\vec{x}, t)$  gegeben durch (2.67) und unter Benutzung von (2.63), (2.64) und (2.54), (2.55) ergeben sich die *Krümmungen der Niveauflächen der Dichte* für die in Satz 2 angegebene Lösung zu:

$$K_g = \frac{-\alpha_x^6 M_x^4}{M_{xx}^4} [B''' A'' - A''' B'']^2|_{\rho-\text{const.}=0} \quad (2.71a)$$

$$K_m = \frac{\alpha_x M_x}{M_{xx}^3} \left[ [-\alpha_x M_x M_{xxx} + 2\alpha_x M_{xx}^2 + 2\alpha_{xx} M_x M_{xx}] [B''^2 + A''^2 + (B'' A' - A'' B')^2] \right. \\ \left. + 2M_x M_{xx} \alpha_x^2 [B''' B'' (1 + A'^2) + A''' A'' (1 + B'^2) - A' B' (B''' A'' - A''' B'')] \right. \\ \left. + 2\alpha_x^3 M_x^3 (B''' A'' - A''' B'') (B'' A' - B' A'') \right]|_{\rho-\text{const.}=0} \quad (2.71b)$$

Bemerkenswert ist, daß für jede Wahl von Anfangsbedingungen in der Lösung (2.50)...(2.55) die *Gaußkrümmung der Niveauflächen von  $\rho$  negativ* ist. Jeder Punkt auf den Niveauflächen ist ein hyperbolischer Punkt.

Für

$$B \propto A \text{ ist } K_g = 0, K_m \neq 0 \quad (2.72a)$$

und für

$$B = A = 0 \text{ ist } K_g = K_m = 0 \quad (2.72b).$$

Der Fall (2.72b) ist nichts anderes als die 1-D Konfiguration (siehe Seite 29), für die natürlich die Niveauflächen Ebenen sein müssen. Für (2.72a) sind die Niveauflächen abwickelbar, das heißt sie können erzeugt werden durch die Bewegung einer Geraden im dreidimensionalen Raum. Damit werden zum Beispiel "pancake"-artige Gebilde beschrieben, die man sich aus Deformation einer ebenen Verdichtung entstanden denken kann. Die Anwendung des Gauß-Bonnet-Theorems, das eine Aussage über die globale Topologie mittels der Gauß-Krümmung macht, wäre nur dann sinnvoll, wenn die Niveauflächen stets kompakt wären, was aber im allgemeinen nicht der Fall ist (siehe auch Gott/Melott/Dickinson 1986).

Da die Lösung aus Satz 2 nur *einen* nichtverschwindenden Eigenwert des Expansions-tensors  $\theta_{ij}$  besitzt, ist es interessant zu wissen, wie der zugehörige Eigenvektor von

Flüssigkeitselement zu Flüssigkeitselement variiert. Für die bloße eindimensionale Bewegung ist diese Richtung natürlich konstant im Raum; für die hier diskutierte Situation muß dies nicht der Fall sein, da ja die Dichte eine Funktion der drei Eulerkoordinaten ist. Die Eigenwertgleichung

$$\theta_{ij} e_j^k = \lambda e_i^k \quad (2.73)$$

hat für  $\theta_{ij}$  gegeben durch (2.59a) folgende Lösungen (der obere Index bei den  $e_i^k$  ist eine Numerierung der Eigenvektoren, der untere ist ein Koordinatenindex):

$$e_i^1 = (1, A', B') \frac{1}{\sqrt{1 + A'^2 + B'^2}}, \quad \lambda_1 = \theta \quad (2.74a)$$

$$e_i^1 e_i^1 = 1$$

und

$$e_i^2 = (-A' e_2^2 - B' e_3^2, e_2^2, e_3^2), \quad \lambda_2 = 0 \quad (2.74b)$$

$$e_i^3 = (-A' e_2^3 - B' e_3^3, e_2^3, e_3^3), \quad \lambda_3 = 0 \quad (2.74c)$$

wobei die  $e_2^2, e_3^2, e_2^3, e_3^3$  so gewählt werden können, daß  $e_i^2$  und  $e_i^3$  senkrecht aufeinander stehen. In jedem Fall sind aber  $e_i^2, e_i^3$  senkrecht auf  $e_i^1$ .

$e_i^1$  gibt die Richtung in jedem Flüssigkeitselement an, in der die Materie die maximale Kontraktionsrate  $\theta$  hat. Somit wird die Materie lokal, auf jeder Teilchenbahn zusammengepreßt in die durch  $e_i^2, e_i^3$  aufgespannte Ebene. Um ein globales Bild von dieser Kontraktion zu bekommen, muß man die Flächen untersuchen, für die  $\vec{e}^1$  an jedem Punkt Normalenvektor ist, bzw. deren Tangentialebenen durch  $\vec{e}^2, \vec{e}^3$  aufgespannt werden.

Betrachtet man die zweidimensionalen Flächenscharen (Scharparameter  $t$ ) im Euler-Raum, gegeben durch

$$\alpha(\vec{x}, t) = \text{const.} \quad (2.75)$$

so zeigt man mittels (2.54), (2.55), daß der Normalenvektor zu (2.75) gegeben ist durch

$$\nabla_{\vec{x}} \alpha = (1, A', B') \frac{\alpha, X}{J} \quad (2.76).$$

Das heißt,  $\nabla_{\vec{x}} \alpha$  ist parallel zu  $\vec{e}^1$  (2.74a).  $\vec{e}^1$  steht also senkrecht auf den Flächen  $\alpha = \text{const.}$ .  $\alpha(\vec{x}, t)$  ist gegeben durch (2.54), (2.55):

$$0 = x + A'y + B'z - t[F + A'H + KB'] + \frac{1}{2}t^2[\alpha + AA' + BB'] + C' \quad (2.77).$$

Für  $\alpha = \text{const.}$  beschreibt (2.77) einfach Ebenen im Euler-Raum, deren Richtungskosinus bestimmt sind durch  $A', B'$ .  $\alpha = \text{const.}$  sind somit Flächen, auf die sich die Materie in jedem Flüssigkeitselement am stärksten konzentriert. Da  $\dot{\alpha} = 0$  ist, bleibt die Orientierung

dieser Flächen im Laufe der Bewegung erhalten, nur der Abstand vom Koordinatenursprung — gegeben durch den Teil in (2.77), der  $x, y, z$  nicht enthält — ändert sich natürlich mit der Bewegung. Da  $\alpha(\vec{X})$  für verschiedene Teilchenbahnen verschieden ist, ändert sich die Orientierung der Flächen auf die die Materie verdichtet wird, von Flüssigkeitselement zu Flüssigkeitselement, je nach der Wahl von  $A, B$ .

Um Information über die Strömungsverhältnisse der Materie relativ zu diesen Hyperflächen maximaler Kontraktion zu erhalten, definiert man sich einen Projektionsoperator

$$\Pi_{ij} \equiv \delta_{ij} - e_i^1 e_j^1 \quad (2.78)$$

der den Anteil des Geschwindigkeitsfeldes herausprojiziert, der in den Flächen liegt, auf denen  $\vec{e}^1$  senkrecht steht. Obwohl die Materie am stärksten in Richtung  $\vec{e}^1$  kontrahiert, ist der transversale Anteil des Geschwindigkeitsvektors

$$v_{i\perp} \equiv \Pi_{ij} v_j \quad (2.79)$$

im allgemeinen nicht Null.

Mit (2.51) und (2.74a) ergibt sich:

$$v_{1\perp} = \frac{1}{(1 + A'^2 + B'^2)} \left[ F(A'^2 + B'^2) - HA' - KB' + t(AA' - \alpha A'^2 + BB' - \alpha B'^2) \right] \quad (2.80a)$$

$$v_{2\perp} = \frac{1}{(1 + A'^2 + B'^2)} \left[ H(1 + B'^2) - A'(F + KB') + t(\alpha A' - A + BA'B' - AB'^2) \right] \quad (2.80b)$$

$$v_{3\perp} = \frac{1}{(1 + A'^2 + B'^2)} \left[ K(1 + A'^2) - B'(F + HA') + t(\alpha B' - B + AA'B' - BA'^2) \right] \quad (2.80c).$$

Im 1-D-Fall ( $A = B = H = K = 0$ ) verschwindet diese transversale Komponente, für beliebige Anfangsbedingungen ist  $v_{i\perp}$  in jedem Flüssigkeitselement eine lineare Funktion von  $t$ . Die Größenordnung der Strömung und deren Richtung in den Hyperflächen maximaler Kontraktion hängt stark von den Anfangsbedingungen ab — wie man aus (2.80) ersehen kann.

### 3. Solitonen in selbstgravitierender Materie

In Abschnitt 2 dieses Kapitels wurde ein Modell für den hochgradig anisotropen Gravitationskollaps diskutiert, das anwendbar ist auf Längenskalen, für die der Gasdruck keine wesentliche Rolle spielt. Da aber bei rotationsfreien Strömungen jedes Teilchen auf eine Hyperfläche mit unendlich hoher Dichte läuft, kann man erwarten, daß es eine Phase des Kollaps gibt, in der der Gasdruck wesentliche Bedeutung gewinnt. Dies wird dann der Fall sein, wenn sich die Materie so weit verdichtet hat, daß die typischen Längenskalen, auf denen die Dichte variiert, in der Größenordnung der Jeans-Länge zu dem entsprechenden Zeitpunkt sind.

Da in dieser Spätphase des Kollaps die Bewegung der Materie in *einer* räumlichen Richtung dominiert, und die volle dreidimensionale Rechnung unter Berücksichtigung des Gasdruckes zu kompliziert ist, kann man die extrem anisotrope Bewegung durch eine eindimensionale Modell idealisieren. Eindimensional bedeutet hier stets, daß alle Materiegrößen nur von einer räumlichen Koordinate und der Zeit abhängen und das Geschwindigkeitsfeld nur *eine* nichtverschwindende Komponente hat. Zumindest in einem kleinen räumlichen Gebiet, in dem die Krümmung der Niveaulächen der Dichte nicht zu stark variiert, ist diese Idealisierung gerechtfertigt. In dieser Phase des Kollaps ist die Dichte schon so stark angewachsen, daß die linearisierte Störungstheorie für Dichteinhomogenitäten auf einem homogenen Hintergrund keine brauchbare Beschreibung mehr liefert. In diesem Abschnitt werden deshalb eindimensionale Strukturen in einer selbstgravitierenden Flüssigkeit untersucht, unter der vollen Berücksichtigung der in (I.8) enthaltenen Nichtlinearitäten. Der Einfachheit halber wird eine isotherme Zustandsgleichung angenommen. Es werden keine weiteren Effekte berücksichtigt, wie zum Beispiel die Kühlung durch Compton-Effekt, Wärmeleitung oder Sternentstehung und damit verbundene Supernova-Explosionen. Solche Effekte könnten durchaus relevant für die Entwicklung von "pancakes" sein, doch deren analytische Behandlung ist sehr schwierig. Die folgenden Rechnungen sind deshalb als einfaches Modell zur Berücksichtigung von Druckeffekten in einem "pancake"-Kollaps zu verstehen.

Das wesentliche Ergebnis ist die Reduktion des Systems (I.8) im 1-D-Fall und isothermer Zustandsgleichung auf eine sine-Gordon Gleichung. Die Transformationsprozedur wird in *Abschnitt 3.1.* erläutert. Von der sine-Gordon Gleichung weiß man, daß das Anfangswertproblem durch eine "inverse-scattering" Transformation vollständig gelöst werden kann. Die herausragenden Eigenschaften der sine-Gordon Gleichung sind die Existenz von *Solitonen* und ein wohldefiniertes asymptotisches Verhalten. Unter welchen Bedingungen sich dieses asymptotische Verhalten auf das Gravitationssystem (I.8) überträgt wird in

*Abschnitt 3.2.* diskutiert. Sämtliche Lösungen des Gravitationssystems, die man aus der Ein-Soliton- und den Zwei-Soliton-Lösungen der sine-Gordon Gleichung erzeugen kann, werden in *Abschnitt 3.3.* explizit angegeben.

Die eindimensionale Gleichgewichtslösung, die sich im folgenden als Ein-Soliton-Lösung herausstellen wird, wurde bereits von Ledoux 1951 im Zusammenhang mit dem Problem der Abstände im Planetensystem diskutiert. Liang 1979 untersucht stationäre, ebene Wellen unter der Hinsicht nichtlinearer Effekte in der Entwicklung von Dichteinhomogenitäten. Stabilitätsfragen von eindimensionalen Strukturen werden bei Mukhanov 1981 und von Simon 1965a/1965b diskutiert. Kates 1986 findet, daß schwach nichtlineare Wellen mit schwach gekrümmten Wellenfronten durch eine nichtlineare Schrödinger-Gleichung beschrieben werden.

Die sine-Gordon Gleichung tritt in vielen verschiedenen Zweigen der mathematischen Physik auf, als eine genäherte Beschreibung von Phänomenen wie "self-induced transparency" oder "josephson junctions" (Lamb 1971, Scott et al. 1973, Whitham 1974). Es wurde von Ablowitz et al. 1973 gezeigt, daß die sine-Gordon Gleichung durch eine "inverse-scattering" Transformation gelöst werden kann, eine Methode die von Gardner et al. 1967 erfunden wurde. Damit kann man das Anfangswertproblem der sine-Gordon Gleichung zurückführen auf ein lineares Eigenwertproblem, bei dem das Eigenwertspektrum und die asymptotische Form der Eigenfunktionen bestimmt ist durch die Anfangsdaten für die sine-Gordon Gleichung. Einen Überblick über die "inverse-scattering" Transformation, angewandt auf partielle Differentialgleichungen, findet man in Ablowitz/Segur 1981 und Calogero/Degasperis 1982. Zusammenfassende Darstellungen über Solitonen im allgemeinen sind Lamb 1980, Eilenberger 1981, Newell 1985, Bullough/Caudrey 1980, Scott et al. 1973.

### 3.1. Nichtlineare, ebene Wellen und die sine-Gordon Gleichung

Es soll das hydrodynamische System (I.8) betrachtet werden, mit der Einschränkung, daß alle Größen nur von einer räumlichen Koordinate  $x$  und der Zeit  $t$  abhängen und das Geschwindigkeitsfeld und die gravitative Beschleunigung  $\vec{g}$  nur *eine* nichtverschwindende Komponente haben:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (u(\vec{x}, t), 0, 0) \\ \vec{g} &= (g(\vec{x}, t), 0, 0)\end{aligned}$$

Die Zustandsgleichung sei die eines isothermen Gases (konstante Temperatur):

$$p = \gamma \rho \quad \gamma = \text{const.} > 0 \quad (3.1).$$

$\gamma$  ist einfach das Quadrat der Schallgeschwindigkeit. Rechnungen, die verschiedene Kühlungsmechanismen berücksichtigen zeigen, daß für metall-arme proto-galaktische Gase eine isotherme Zustandsgleichung in einem großen Dichtebereich eine gute Näherung ist (Silk 1977).

Unter diesen Annahmen lautet das Gleichungssystem (I.8)

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0 \quad (3.2a)$$

$$u_t + uu_x = g - \gamma \frac{\rho_x}{\rho} \quad (3.2b)$$

$$g_x = -\rho \quad (3.2c)$$

$$g = -\Phi_x \quad (3.2d)$$

In diesem Abschnitt wird durch eine Reihe von Transformationen die das System (3.2) vollständig auf eine sine-Gordon Gleichung reduziert. Dazu transformiert man zunächst von den Variablen  $x, t$  auf neue unabhängige Variable  $\mu, \lambda$ , die so definiert sind, daß die Charakteristiken (siehe Courant/Hilbert 1968) des Systems (3.2) durch

$$C_+ : \lambda = \text{const.}$$

$$C_- : \mu = \text{const.}$$

gegeben sind. Durch jeden Punkt im  $(x, t)$ -Raum laufen zwei charakteristische Kurven, jeweils eine aus jeder der beiden Scharen  $C_{\pm}$ , die bestimmt sind als die Integralkurven der Vektorfelder

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\gamma} \quad (3.3a)$$

$$C_- : \frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\gamma} \quad (3.3b).$$

Für positives  $\gamma$  ist das System (3.2) stets hyperbolisch, in dem Sinne, daß die aus (3.2) ableitbare Gleichung zweiter Ordnung für die Größe  $g$  hyperbolisch ist: Setzt man  $\rho$  aus (3.2c) in die Kontinuitätsgleichung (3.2a) ein, integriert die resultierende Gleichung über  $x$  und setzt die dabei auftretende Integrationsfunktion gleich Null (dies ist wegen der "Heckmann-Schücking" Kovarianz von (I.8) ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich), so bekommt man

$$g_t + u g_x = 0 \quad (3.4).$$

(3.4) aufgelöst nach  $u$  und zusammen mit (3.2c) eingesetzt in die Euler-Gleichung (3.2b) ergibt dann eine Gleichung zweiter Ordnung für  $g$ :

$$g_{xx} (g_t^2 - \gamma g_x^2) + g_{tt} g_x^2 - 2g_t g_x g_{tx} + g g_x^3 = 0 \quad (3.5).$$

Aus (3.5) lassen sich sofort die Bestimmungsgleichungen der Charakteristiken (3.3) ablesen.

Führt man nun die Transformation zwischen  $(x, t)$  und  $(\lambda, \mu)$  aus, so bekommt man aus (3.2) einen Satz von Gleichungen für die fünf Funktionen  $\rho(\lambda, \mu)$ ,  $u(\lambda, \mu)$ ,  $g(\lambda, \mu)$ ,  $x(\lambda, \gamma)$ ,  $t(\lambda, \mu)$ . Die  $(x, t)$ -Ableitungen transformieren sich gemäß

$$\partial_x = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{1}{t_\mu} \partial_\mu - \frac{1}{t_\lambda} \partial_\lambda \right] \quad (3.6a)$$

$$\partial_t = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{1}{t_\lambda} (u + \sqrt{\gamma}) \partial_\lambda - \frac{1}{t_\mu} (u - \sqrt{\gamma}) \partial_\mu \right] \quad (3.6b).$$

Damit wird aus den Gleichungen (3.2) folgendes System:

$$x_\mu = (u + \sqrt{\gamma}) t_\mu \quad (3.7a)$$

$$x_\lambda = (u - \sqrt{\gamma}) t_\lambda \quad (3.7b)$$

$$\rho u_\mu + \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} g^2 + \sqrt{\gamma} \rho \right]_{,\mu} = 0 \quad (3.8a)$$

$$-\rho u_\lambda + \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} g^2 + \sqrt{\gamma} \rho \right]_{,\lambda} = 0 \quad (3.8b)$$

$$g_\mu = -\sqrt{\gamma} \rho t_\mu \quad (3.9a)$$

$$g_\lambda = \sqrt{\gamma} \rho t_\lambda \quad (3.9b)$$

Die Äquivalenz des Anfangswertproblems für das charakteristische System (3.7), (3.8), (3.9) zum entsprechenden Anfangswertproblem des ursprünglichen Systems (3.2) kann man ganz allgemein für hyperbolische Systeme mit zwei unabhängigen Variablen zeigen (siehe Courant/Hilbert 1968, Goursat 1896). (3.7), (3.8), (3.9) sind sechs Gleichungen für die fünf Funktionen  $u, \rho, g, x, t$ . Es ist aber einfach, zu beweisen, daß eine von den Gleichungen (3.9) redundant ist.

Betrachtet man (3.8) und (3.9) als vier Gleichungen für die vier Funktionen  $u, \rho, g, t$ , dann kann man zeigen, daß die Integrabilitätsbedingung für  $x$  (3.7) identisch erfüllt ist, das heißt (3.7) ist dann einfach eine Quadratur.

Zur Abkürzung definiert man statt  $\rho$  eine neue Variable  $R$

$$R \equiv \ln \rho \quad (3.10).$$

Die Integrabilitätsbedingungen für  $u(\lambda, \mu)$  und  $t(\lambda, \mu)$ , abgeleitet aus (3.8) und (3.9) ( $u_{\lambda\mu} = u_{\mu\lambda}$ ,  $t_{\lambda\mu} = t_{\mu\lambda}$ ) ergeben zwei Gleichungen zweiter Ordnung für  $R(\lambda, \mu)$  und  $g(\lambda, \mu)$ :

$$2g_{\lambda\mu} = R_{\lambda}g_{\mu} + R_{\mu}g_{\lambda} \quad (3.11a)$$

$$R_{\lambda\mu} = -\frac{1}{\gamma} e^{-R} g_{\mu}g_{\lambda} \quad (3.11b).$$

Multipliziert man (3.11a) jeweils mit  $g_{\lambda}$  und  $g_{\mu}$  und benutzt dabei (3.11b), so bekommt man zwei lineare Gleichungen für  $(g_{\lambda})^2$  und  $(g_{\mu})^2$ :

$$[(g_{\lambda})^2]_{,\mu} - R_{\mu}(g_{\lambda})^2 = -\frac{1}{2}\gamma [(R_{\lambda})^2]_{,\mu} e^R \quad (3.12a)$$

$$[(g_{\mu})^2]_{,\lambda} - R_{\lambda}(g_{\mu})^2 = -\frac{1}{2}\gamma [(R_{\mu})^2]_{,\lambda} e^R \quad (3.12b)$$

die gelöst werden durch

$$g_{\lambda}^2 = e^R [\eta_1(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma R_{\lambda}^2] \quad (3.13a)$$

$$g_{\mu}^2 = e^R [\eta_2(\mu) - \frac{1}{2}\gamma R_{\mu}^2] \quad (3.13b).$$

$\eta_1$  und  $\eta_2$  sind zwei beliebige, positive Integrationsfunktionen. Da das System (3.7), (3.8), (3.9) invariant ist unter einer Transformation

$$\lambda \rightarrow f(\lambda), \quad \mu \rightarrow h(\mu) \quad (3.14)$$

kann man  $\eta_1$  und  $\eta_2$  vollkommen beliebig wählen, ohne daß man dabei Lösungen verliert. Eine Transformation (3.14) entspricht einfach einer "Umbenennung" der charakteristischen Kurven, hat also keine physikalische Bedeutung.

Es stellt sich nun später heraus, daß es bequem ist,  $\eta_1$  und  $\eta_2$  so zu fixieren, daß (3.13) lautet:

$$g_\lambda^2 = \frac{1}{2} \gamma e^R [4 - R_\lambda^2] \quad (3.15a)$$

$$g_\mu^2 = \frac{1}{2} \gamma e^R [4 - R_\mu^2] \quad (3.15b).$$

Diese Ausdrücke für  $(g_\lambda)^2$  und  $(g_\mu)^2$  eingesetzt in (3.11b) ergibt:

$$R_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} \sqrt{4 - R_\lambda^2} \sqrt{4 - R_\mu^2} \quad (3.16).$$

Es bleibt schließlich noch das Problem diese Gleichung zweiter Ordnung für  $R$  zu lösen.

Da alle Größen in diesem Zusammenhang reell sein müssen, bedeutet die Einführung von zwei neuen abhängigen Variablen  $\alpha(\lambda, \mu)$  und  $\beta(\lambda, \mu)$ , definiert durch

$$R_\lambda = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.17a)$$

$$R_\mu = 2 \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (3.17b)$$

keine Einschränkung der Allgemeinheit. Setzt man (3.17) in (3.16) ein, ergeben sich zwei Gleichungen erster Ordnung für  $\alpha(\lambda, \mu)$  und  $\beta(\lambda, \mu)$  statt einer Gleichung zweiter Ordnung für  $R(\lambda, \mu)$ :

$$\frac{1}{2} (\alpha_\mu + \beta_\mu) = \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (3.18a)$$

$$\frac{1}{2} (\beta_\lambda - \alpha_\lambda) = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.18b).$$

Die Integrabilitätsbedingungen für  $\alpha$  und  $\beta$ , abgeleitet aus (3.18), entsprechen genau der sine-Gordon Gleichung :

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda\mu} &= \sin \alpha \\ \beta_{\lambda\mu} &= \sin \beta \end{aligned} \quad (3.19).$$

(3.18) ist nichts anderes als die sogenannte auto-Bäcklund-Transformation der sine-Gordon Gleichung, die Lösungen von (3.19) auf sich selbst abbildet (siehe Dodd/Eckmann 1976,

Ablowitz/Segur 1981, Anderson/Ibragimov 1979). Das heißt, aus einer beliebig vorgegebenen Lösung der sine-Gordon Gleichung, zum Beispiel  $\alpha$ , kann man eine andere Lösung  $\beta$  mittels der Bäcklundtransformation (3.18) erzeugen. Da die Integrabilitätsbedingungen von (3.18) die sine-Gordon Gleichungen (3.19) sind, ist  $\beta$  alleine durch Quadraturen bestimmt.

Hiermit ist gezeigt, daß das Gravitationssystem (3.2) sich auf eine sine-Gordon Gleichung (3.19) reduzieren läßt:

**Satz 3:** Sämtliche Lösungen des Gleichungssystems (3.2) für nichtlineare, ebene Wellen in einer selbstgravitierenden Flüssigkeit mit isothermer Zustandsgleichung (3.1) lassen sich aus der Lösungsmannigfaltigkeit der sine-Gordon Gleichung für eine Funktion  $\alpha$

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sin \alpha \quad (3.20)$$

erzeugen.  $\lambda$  und  $\mu$  sind die charakteristischen Koordinaten von (3.2). Die ursprünglichen physikalischen Variablen Dichte, Geschwindigkeit und Gravitationsbeschleunigung sind gegeben durch die folgenden Quadraturen.  $\beta$  ist eine zweite Lösung der sine-Gordon Gleichung, die vollständig durch  $\alpha$  mittels der auto-Bäcklund-Transformation (3.18) bestimmt ist:

$$R_\lambda = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.21a)$$

$$R_\mu = 2 \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (3.21b)$$

$$\rho = e^R \quad (3.21c)$$

$$g_\lambda = \sqrt{2\gamma} e^{\frac{1}{2}R} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.22a)$$

$$g_\mu = \sqrt{2\gamma} e^{\frac{1}{2}R} \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (3.22b)$$

$$u_\lambda = e^{-R} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} g^2 + \sqrt{\gamma} e^R \right]_{,\lambda} \quad (3.23a)$$

$$u_\mu = -e^{-R} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} g^2 + \sqrt{\gamma} e^R \right]_{,\mu} \quad (3.23b)$$

$$t_\lambda = -\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}R} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (3.24a)$$

$$t_\mu = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}R} \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \quad (3.24b)$$

$$x_\lambda = t_\lambda(u - \sqrt{\gamma}) \quad (3.25a)$$

$$x_\mu = t_\mu(u + \sqrt{\gamma}) \quad (3.25b)$$

**Beweis:** Zunächst wird nur die Äquivalenz der Anfangswertprobleme von (3.2) und dem entsprechenden charakteristischen System (3.7), (3.8), (3.9) benutzt. Die Schritte von diesem charakteristischen System zu (3.18) enthalten keine zusätzlichen Restriktionen. Es wird nur von der Invarianz des Systems unter den Transformationen (3.14) Gebrauch gemacht und von der Äquivalenz eines Systems von Differentialgleichungen mit mehrerer unabhängigen Variablen zu einem System höherer Ordnung mit weniger Variablen. ♠

Die Lösungen von (3.2) sind somit im allgemeinen gegeben in einer Parameterdarstellung:  $\rho(\lambda, \mu)$ ,  $u(\lambda, \mu)$ ,  $g(\lambda, \mu)$ ,  $x(\lambda, \mu)$ ,  $t(\lambda, \mu)$ . Sie sind nur in solchen Gebieten der  $(x, t)$ -Ebene durch die Lösung der sine-Gordon Gleichung definiert, für die die Jacobideterminante der Transformation  $(x, t) \leftrightarrow (\lambda, \mu)$

$$J \equiv x_\mu t_\lambda - x_\lambda t_\mu = 2\sqrt{\gamma} e^{-R} (\cos \beta - \cos \alpha) \quad (3.26)$$

nicht verschwindet. Ist  $J = 0$  auf bestimmten Kurven in der  $(x, t)$ -Ebene, so entspricht das Singularitäten in den physikalischen Variablen, wie zum Beispiel Unstetigkeiten in der Dichte oder deren Ableitungen.

Im Prinzip werden die Lösungen des Gravitationssystems bestimmt durch jeweils zwei Lösungen der sine-Gordon Gleichung —  $\alpha$  und  $\beta$  — die in eindeutiger Beziehung zueinander stehen. Für die Transformationsprozedur zur Erzeugung von Lösungen in Satz 3 ist es natürlich belanglos mit welcher der beiden man startet. Allerdings ist die auto-Bäcklund-Transformation (3.18) nicht vollkommen symmetrisch in  $\alpha$  und  $\beta$ , was sich auch auf die

Quadraturen (3.21)...(3.25) auswirkt. (3.18) ist aber invariant unter folgender *Austauschsymmetrie*

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow \beta \\ \beta &\rightarrow \alpha \\ \lambda, \mu &\rightarrow -\lambda, -\mu\end{aligned}\tag{3.27}.$$

In Abschnitt 3.3. wird gezeigt, daß man mittels (3.27) zu vollkommen unterschiedlichen Lösungen des Gravitationssystems gelangen kann.

Bemerkenswert an der Transformation von den physikalischen Koordinaten  $(x, t)$  auf die charakteristischen Koordinaten ist, daß sie für verschwindenden Gasdruck  $p = 0$  (das heißt  $\gamma = 0$ ) singulär wird, siehe (3.26). Die bekannte 1-D Lösung für Staub kann damit nicht mittels Satz 3 erzeugt werden. Die Ursache dafür ist das Zusammenfallen der beiden Charakteristikenscharen (3.3) für  $\gamma = 0$ , was wiederum bedeutet, daß das System (3.2) bzw. Gleichung (3.5) in diesem Fall parabolisch wird statt hyperbolisch.

Es ist zunächst verblüffend, daß einerseits die sine-Gordon Gleichung (3.20) invariant ist unter Lorentz-Transformationen in der  $(\lambda, \mu)$ -Ebene, andererseits das System (3.2) invariant ist unter Galilei-Transformationen in der  $(x, t)$ -Ebene. Die Lorentz-Invarianz impliziert jedoch keine Symmetrie des Gravitationssystems, da schon die Bäcklundtransformation (3.18) nicht invariant ist unter Lorentz-Transformationen  $\lambda \rightarrow c\lambda$ ,  $\mu \rightarrow \frac{1}{c}\mu$  ( $c = \text{const.}$ ). Damit sind natürlich die Quadraturen (3.21)...(3.25) auch nicht invariant.

Ein Nachteil partielle Differentialgleichungen in charakteristischen Koordinaten zu lösen, ist die Abhängigkeit der Transformation  $(x, t) \leftrightarrow (\lambda, \mu)$  von der Lösung selbst, was seine Ursache im nichtlinearen Charakter der Gleichung hat. Diese Abhängigkeit macht es im allgemeinen unmöglich, eine Beziehung herzustellen zwischen einem Gebiet in der  $(x, t)$ -Ebene und dem entsprechenden Gebiet in der  $(\lambda, \mu)$ -Ebene, ohne daß man schon die vollständige Lösung kennt. Insbesondere bedeutet dies, daß man nicht weiß, welche Anfangsbedingungen für das Gravitationssystem (3.2) welchen Anfangsbedingungen der sine-Gordon Gleichung (3.20) entsprechen. Es ist nur möglich (3.20) für irgendwelche Anfangsbedingungen zu lösen, sich die Lösung des Gravitationssystems mittels (3.21)...(3.25) zu beschaffen, um dann zu sehen welche Anfangsbedingungen jenen der sine-Gordon Gleichung entsprechen.

Die sine-Gordon Gleichung läßt sich jedoch durch eine "inverse scattering" Transformation vollständig lösen, das heißt, es existiert ein lineares Eigenwertproblem assoziiert mit (3.20), dessen Lösung bestimmt wird durch die Anfangsbedingungen die man für die sine-Gordon Gleichung vorgibt. Das Eigenwertproblem liefert die sogenannten "Streudaten":

diskretes und kontinuierliches Spektrum und die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten der asymptotischen Form der Eigenfunktionen. Obwohl man damit die Lösung der sine-Gordon Gleichung nicht in einer expliziten, integralfreien Form durch frei wählbare Funktionen ausdrücken kann, kann man dennoch mittels der "inverse scattering" Transformation eine Klassifizierung der Lösungen in zwei Klassen vornehmen, entsprechend dem kontinuierlichen und diskreten Spektrum das durch die Anfangsdaten bestimmt wird und dessen Charakter durch die Zeitentwicklung der Streudaten nicht verändert wird. Der Anteil der Lösung, der dem diskreten Spektrum korrespondiert, ist der Solitongehalt der Lösung, das kontinuierliche Spektrum entspricht dem sogenannten Strahlungsanteil. Man kann nun zeigen, daß für alle nicht-charakteristischen Anfangsdaten, der Strahlungsanteil asymptotisch zerfällt und nur eine Superposition von Solitonen übrigbleibt. Die sine-Gordon Gleichung hat somit ein wohldefiniertes asymptotisches Verhalten, das qualitativ unabhängig ist von den Anfangsbedingungen. Die Anfangsdaten bestimmen nur die Anzahl der Solitonen (gleich der Anzahl diskreter Eigenwerte) und deren Amplitudenverteilung. In Abschnitt 3.2. wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich diese Asymptotik auf das Gravitationssystem überträgt.

Unter Solitonen versteht man lokalisierte Pulse, die im Unendlichen zumeist exponentiell abfallen und die fast elastisch wechselwirken, wie Wellen, die durch lineare Gleichungen bestimmt sind. Der einzige Effekt der Wechselwirkung ist eine Phasenverschiebung, die Gestalt der Pulse wird durch die Wechselwirkung nicht verändert.

Charakteristisch für die sine-Gordon Gleichung ist auch die Existenz gebundener Soliton-Soliton Zustände, was davon herrührt, daß das assoziierte Eigenwertproblem nicht selbstadjungiert ist (sogenannte "breather"-Lösung).

An expliziten Lösungen der sine-Gordon Gleichung kennt man bis jetzt alle reinen Soliton-Lösungen, sogar die  $N$ -Soliton-Lösung kann man explizit als Determinante einer  $(N \times N)$ -Matrix angeben (Caudrey et al. 1973). Lösungen die keine Solitonen enthalten oder ein Gemisch aus Solitonen und Strahlungsanteil sind derzeit nicht explizit bekannt. Deshalb werden in Abschnitt 3.3. nur die Lösungen des Gravitationssystems angegeben, die man aus allen Ein- und Zwei-Soliton-Lösungen der sine-Gordon Gleichung gewinnen kann.

### 3.2. Asymptotik

Was impliziert das asymptotische Verhalten der sine-Gordon Gleichung für das Gravitationssystem ? Statt der "Lichtkegelkoordinaten"  $\lambda, \mu$  führt man neue Koordinaten

$$\hat{\lambda} \equiv \lambda + \mu, \quad \hat{\mu} \equiv \lambda - \mu$$

ein, in denen (3.20) lautet

$$\alpha_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}} - \alpha_{\hat{\mu}\hat{\mu}} = \sin \alpha \quad (3.28).$$

Diese Gleichung induziert eine Kausalstruktur, die durch den Lichtkegel  $\hat{\mu}^2 - \hat{\lambda}^2 = 0$  bestimmt ist. Für  $\hat{\mu} \rightarrow \infty$  zerfällt  $\alpha$  in eine Superposition von Solitonen, wenn die Anfangsdaten auf einer Kurve vorgegeben sind, die im Bereich  $\hat{\mu}^2 - \hat{\lambda}^2 < 0$  liegt. Wegen der Symmetrie  $\alpha \rightarrow \pi + \alpha, \hat{\lambda} \leftrightarrow \hat{\mu}$  gilt dies ebenso für  $\hat{\lambda} \rightarrow \infty$ , wenn Anfangsbedingungen im Bereich  $\hat{\mu}^2 - \hat{\lambda}^2 > 0$  vorliegen. Was das Gravitationssystem betrifft, ist man am asymptotischen Verhalten der Lösung auf den Kurven  $x = \text{const.}$  für  $t \rightarrow \infty$  interessiert, wenn die Anfangsbedingungen bei  $t = \text{const.}$  vorgegeben werden. Die Frage ist nun, unter welchen Bedingungen diese Kurven —  $t = \text{const.}$  und  $x = \text{const.}$  — in verschiedenen, kausal getrennten Regionen der  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ -Ebene liegen?

Wenn  $t = \text{const.}$  im Gebiet  $\hat{\lambda}^2 - \hat{\mu}^2 > 0$  ( $\hat{\lambda}^2 - \hat{\mu}^2 < 0$ ) liegt und  $x = \text{const.}$  im Bereich  $\hat{\lambda}^2 - \hat{\mu}^2 < 0$  ( $\hat{\lambda}^2 - \hat{\mu}^2 > 0$ ), dann bekommt man das asymptotische Verhalten der physikalischen Größen  $\rho, u, g$  für  $t \rightarrow \infty$ , wenn man in der Parameterdarstellung der Lösung einfach  $\hat{\lambda} \rightarrow \infty$  ( $\hat{\mu} \rightarrow \infty$ ) gehen läßt. In diesem Fall, wenn also  $t = \text{const.}$  und  $x = \text{const.}$  in verschiedenen kausalen Gebieten der  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ -Ebene liegen, wird die Lösung des Gravitationssystem für  $t \rightarrow \infty$  erzeugt aus einer Superposition von Solitonen der sine-Gordon Gleichung.

Nun ist zwar noch nicht offensichtlich, welche Lösung durch eine Superposition von sine-Gordon-Solitonen erzeugt wird, doch in Abschnitt 3.3. wird gezeigt, daß eine Zwei-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung eine Zwei-Soliton Lösung des Gravitationssystem produziert. Da das typische Soliton-Verhalten bereits in der Zwei-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung hervortritt und die N-Soliton Lösung asymptotisch eine lineare Superposition von Ein-Soliton Lösungen ist, wird eine N-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung eine N-Soliton Lösung des Gravitationssystem erzeugen, die vermutlich zu kompliziert ist, um sie explizit konstruieren zu können.

Wenn für  $t \rightarrow \infty$   $\rho, u, g$  erzeugt werden aus einer linearen Superposition von sine-Gordon-Solitonen, dann überträgt sich das asymptotische Verhalten der sine-Gordon Gleichung direkt auf das Gravitationssystem. Unter welchen Bedingungen sind nun die Voraussetzungen dazu gegeben?

Die  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ -Ebene sei mit einer Minkowski-Metrik

$$ds^2 = d\hat{\mu}^2 - d\hat{\lambda}^2$$

versehen. Der Betrag des Tangentenvektors der Kurven  $x = \text{const.}$  in der  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ -Ebene

$$\left( \hat{\mu}(t, x = \text{const.}), \hat{\lambda}(t, x = \text{const.}) \right) \quad (3.29)$$

ist dann gegeben durch

$$\hat{\mu}_t^2 - \hat{\lambda}_t^2 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{J} (u^2 - \gamma)|_{x=\text{const.}} \quad (3.30)$$

wobei  $J$  durch (3.26) definiert ist. Der Betrag des Tangentenvektors der Kurven  $t = \text{const.}$  in der  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ -Ebene

$$\left( \hat{\mu}(t = \text{const.}, x), \hat{\lambda}(t = \text{const.}, x) \right) \quad (3.31)$$

ist dann

$$\hat{\mu}_x^2 - \hat{\lambda}_x^2 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{J}|_{t=\text{const.}} \quad (3.32).$$

Damit ist klar, daß die Kurven  $t = \text{const.}$  und  $x = \text{const.}$  nur dann in verschiedenen Kausalgebieten  $\hat{\lambda}^2 - \hat{\mu}^2 > 0$ ,  $\hat{\lambda}^2 - \hat{\mu}^2 < 0$  liegen, wenn das Vorzeichen des Betrags der Tangentenvektoren (3.30) und (3.32) verschieden ist, was nur für

$$u^2 < \gamma$$

der Fall ist. Für Unterschallströmungen überträgt sich das asymptotische Verhalten der sine-Gordon Gleichung direkt auf die Asymptotik des Gravitationssystem .

Für diesen Fall ( $u^2 < 0$ ) bekommt man das Verhalten bei  $t \rightarrow \infty$  aus der Parameterdarstellung aus dem Grenzfall  $\hat{\mu} \rightarrow \infty$ , vorausgesetzt es ist  $(u^2 - \gamma) \frac{1}{J} > 0$ ; ist  $(u^2 - \gamma) \frac{1}{J} < 0$ , so bekommt man das asymptotische Verhalten, wenn man den Bereich  $\hat{\lambda} \rightarrow \infty$  in der Parameterdarstellung von  $\rho, g, u$  untersucht.

Zwar enthält die Lösung des Gravitationssystem die zwei Lösungen der sine-Gordon Gleichung  $\alpha, \beta$ , doch die Bäcklundtransformation  $\alpha \rightarrow \beta$  fügt einer reinen  $(N-1)$ -Solitonen Lösung  $\alpha$  nur ein weiteres Soliton hinzu,  $\beta$  wäre dann einfach eine reine  $N$ -Soliton Lösung ohne Strahlungsanteil. Selbst wenn  $\alpha$  keine Solitonen enthält, sondern nur zu einem kontinuierlichen Spektrum gehört, würde  $\beta$  durch die Bäcklundtransformation einen diskreten Eigenwert enthalten.

Für Überschallströmungen  $u^2 > \gamma$  liegen die Kurven  $t = \text{const.}$ , auf denen die Anfangsdaten vorgegeben sind, und die Kurven  $x = \text{const.}$ , auf denen das asymptotische Verhalten  $t \rightarrow \infty$  bestimmt werden soll, im selben Kausalgebiet der sine-Gordon Gleichung, was eine Aussage über die Asymptotik des Gravitationssystems unmöglich macht.

Die Frage, ob es wirklich Lösungen mit  $u^2 < 0$  für alle Zeiten gibt, ist natürlich nicht unmittelbar zu beantworten.

Stellt man sich die Anfangsbedingungen zerlegt in eine Fourierreihe vor, dann kann man das asymptotische Verhalten — Zerfall in Solitonen — interpretieren als eine nichtlineare Wechselwirkung der verschiedenen Fourierkomponenten, wobei die Phasen genau so verkoppelt werden, daß eine bestimmte Kombination von Solitonen übrigbleibt.

### 3.3. Partikuläre Lösungen

In diesem Abschnitt werden alle Lösungen des Gravitationssystems (3.2) explizit angegeben, die man aus sämtlichen Ein- und Zwei-Soliton Lösungen der sine-Gordon Gleichung erzeugen kann. Die allgemeine N-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung ist zwar bekannt, doch erscheint es unmöglich, die Quadraturen (3.21)....(3.25) explizit zu lösen. Da das typische Soliton-Verhalten schon an der Zwei-Soliton Lösung abzulesen ist und die N-Soliton Lösung keine qualitativ neuen Eigenschaften aufweist, dürfte es genügen, wenn man die Zwei-Soliton Lösung des Gravitationssystems untersucht als Repräsentant der Soliton-Soliton Wechselwirkung.

Da die Solitonen eine herausragende Bedeutung durch die Asymptotik der sine-Gordon Gleichung haben, sind die im folgenden diskutierten partikulären Lösungen nicht so speziell, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Leider sind außer den Solitonen explizit keine weiteren Lösungen bekannt, so daß man zum Beispiel die Wechselwirkung des Strahlungsanteils und der Solitonen nicht untersuchen kann.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Konstruktion von Soliton Lösungen ist das sogenannte Lamb-Diagramm. Aus der Bäcklundtransformation (3.18) kann man durch Transformation auf eine Riccati-Gleichung eine Art nichtlineares Superpositionsprinzip der Lösungen der sine-Gordon Gleichung herleiten (siehe Anderson/Ibragimov 1979). Seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  vier verschiedene Lösungen der sine-Gordon Gleichung, die über folgende Bäcklund-Transformationen verbunden sein sollen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\alpha_\mu + \beta_\mu) &= \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(\beta_\lambda - \alpha_\mu) &= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_{1\mu} + \beta_\mu) &= \epsilon \sin\left(\frac{\beta - \sigma_1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(\beta_\lambda - \sigma_{1\lambda}) &= \frac{1}{\epsilon} \sin\left(\frac{\sigma_1 + \beta}{2}\right)\end{aligned}$$

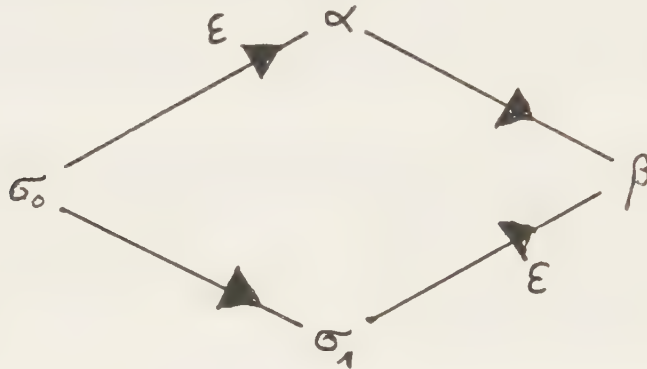
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\alpha_\mu + \sigma_{0\mu}) &= \epsilon \sin\left(\frac{\alpha - \sigma_0}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(\alpha_\lambda - \sigma_{0\lambda}) &= \frac{1}{\epsilon} \sin\left(\frac{\sigma_0 + \alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_{0\mu} + \sigma_{1\mu}) &= \sin\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(\sigma_{1\lambda} - \sigma_{0\lambda}) &= \sin\left(\frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2}\right)\end{aligned}$$

Dann läßt sich zeigen, daß diese vier Lösungen folgende algebraische Beziehung erfüllen müssen:

$$\tan\left(\frac{\beta - \sigma_0}{4}\right) = \frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1} \tan\left(\frac{\alpha - \sigma_1}{4}\right) \quad (3.33)$$

In grafischer Darstellung sieht das so aus



wobei die Pfeile jeweils eine Bäcklund-Transformation symbolisieren.  $\epsilon$  ist eine beliebige Konstante.

Startet man zum Beispiel bei  $\sigma_0$  und wählt  $\sigma_0 = 0$  als Lösung der sine-Gordon Gleichung, dann ergeben die Bäcklundtransformationen die Ein-Soliton Lösungen  $\alpha$  und  $\sigma_1$ . Die Zwei-Soliton-Lösung  $\beta$  erhält man dann aus (3.33) durch rein algebraische Operationen. Die Konstante  $\epsilon$  erweist sich einfach als die Relativgeschwindigkeit der zwei Solitonen in der  $(\lambda, \mu)$ -Ebene. Auf diese Weise kann man schrittweise Lösungen mit mehrerer Solitonen konstruieren. Allerdings hat die Bäcklund-Transformation keine Gruppeneigenschaften, so daß man, um zu einer N-Soliton Lösung zu gelangen, zuerst stufenweise alle Lösungen mit weniger als N Solitonen konstruiert haben muß.

### 3.3.1. Die Ein-Soliton Lösung

Beginnt man mit der trivialen Lösung der sine-Gordon Gleichung (3.20),  $\alpha = 0$ , dann produziert die Bäcklundtransformation (3.18) einen sogenannten "Kink":

$$\beta = 4 \arctan(e^{\mu + \lambda + c}), \quad c = \text{const.} \quad (3.34).$$

Nachdem man sich durch alle Quadraturen (3.21)...(3.25) gearbeitet hat, bekommt man die Lösung des Gravitationssystems (3.2) explizit in  $(x, t)$  Koordinaten:

$$\begin{aligned}\rho &= A \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{A}{2\gamma}} (x - u_0 t) + c \right], \quad A = \text{const.} \\ u &= u_0 = \text{const.} \\ g &= \sqrt{2\gamma A} \tanh \left[ \sqrt{\frac{A}{2\gamma}} (x - u_0 t) + c \right]\end{aligned}\tag{3.35}$$

Das ist einfach ein einzelner Puls in der Dichteverteilung, der sich mit konstanter Geschwindigkeit  $u_0$  entlang der  $x$ -Achse bewegt. Die typisch nichtlineare Eigenschaft ist die Abhängigkeit der Breite des Pulses

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{A}}$$

von der frei wählbaren Amplitude  $A$ . Dieser Zusammenhang ist derselbe wie bei den KdV-Solitonen (Lamb 1980).

Das Soliton (3.35) entsteht aus einem Gleichgewicht der Gravitationskraft  $g$  und der Druckkraft  $\gamma \frac{\rho_x}{\rho}$ , wie aus (3.2b) ersichtlich, wenn man die Geschwindigkeit  $u$  konstant setzt.

Die Frage nach der *Stabilität* des Solitons (3.35) läßt sich durch Untersuchung von kleinen Störungen in  $\rho, u, g$  beantworten. Die Störungen seien

$$\begin{aligned}g &= g_0 + \varepsilon g_1 + \dots \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \\ -\rho &= g_{0x} + \varepsilon g_{1x} + \dots\end{aligned}\tag{3.36}$$

wobei die ungestörten Größen aus (3.35) hier durch einen Index 0 gekennzeichnet sind. Gleichung (3.2c) ist dabei schon berücksichtigt worden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Ein-Soliton Lösung durch eine Galilei-Transformation in das Ruhesystem mit  $u_0 = 0$  transformieren. Bis zur Ordnung  $\varepsilon$  lauten dann die Gleichungen für die Störungen  $u_1, g_1$ :

$$u_1 = -\frac{g_{1t}}{g_{0x}}\tag{3.37a}$$

$$0 = \gamma g_{1xx} - g_{1tt} + (g_0 g_1)_x\tag{3.37b}$$

Eine Fourierzerlegung von (3.37b) in  $t$  ergibt:

$$g_1 = \tilde{g}_1(\omega, x) e^{i\omega t}$$

$$\gamma \tilde{g}_{1xx} + \omega^2 \tilde{g}_1 + (\tilde{g}_1 g_0)_x = 0 \quad (3.38)$$

Führt man eine neue unabhängige Variable

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{A}{2\gamma}} x$$

und eine neue abhängige Variable

$$\psi(\xi, \omega) \equiv \tilde{g}_1(\xi, \omega) \cosh \xi$$

ein, dann wird aus (3.38) eine Schrödinger-Gleichung für  $\psi$  mit einem Potential, für das der Reflexionskoeffizient verschwindet (Morse/Feshbach II, 1953):

$$\psi_{\xi\xi} + [2\operatorname{sech}^2(\xi) - \kappa] \psi = 0 \quad (3.39)$$

mit

$$\kappa \equiv 1 - \frac{2\omega^2}{A} \quad (3.40).$$

Die Lösung des Eigenwertproblems (3.39) kann man vollständig angeben (siehe Lamb 1980):

$$\psi(\xi, \omega) = c_1 e^{\sqrt{\kappa}\xi} [\sqrt{\kappa} - \tanh \xi] + c_2 e^{-\sqrt{\kappa}\xi} [\sqrt{\kappa} + \tanh \xi] \quad (3.41a)$$

$$c_1, c_2 = \text{const.}$$

Die zwei Fundamentallösungen in (3.41a) sind nur dann unabhängig, wenn  $\kappa \neq 0, 1$  ist. Für  $\kappa = 0$  wird (3.39) gelöst von

$$\psi = c_1 \tanh \xi + c_2 [\xi \tanh \xi - 1] \quad (3.41b)$$

und für  $\kappa = 1$  ist  $\psi$

$$\psi = c_1 \frac{1}{\cosh \xi} + c_2 \left[ \sinh \xi + \frac{\xi}{\cosh \xi} \right] \quad (3.41c).$$

Die Randbedingungen für die Störungen sollen so gewählt sein, daß

$$\rho \rightarrow 0 \text{ für } |\xi| \rightarrow \infty$$

gilt. Das ist nur dann der Fall, wenn auch  $\tilde{g}_1 \rightarrow 0$  für  $|\xi| \rightarrow \infty$ , was impliziert, daß  $\psi$  höchstens wie  $e^\xi$  divergieren kann. Aus (3.41) ist ersichtlich, daß dies nur möglich ist, wenn

$$\sqrt{\kappa} < 1 \Leftrightarrow \omega^2 > 0 \quad (3.42)$$

da  $A > 0$ , für  $\rho > 0$ .

Für Störungen, die parallel zur x-Achse laufen, ist die Ein-Soliton Lösung (3.35) somit marginal stabil. Bemerkenswert ist, daß dies für jede Amplitude  $A$  und damit für jede Breite des Puls gilt. Es können also in einer selbstgravitierenden Flüssigkeit pulsartige Dichteinhomogenitäten auftreten, die auf *jeder* Längenskala stabil sind. Darin unterscheiden sich die Solitonen signifikant von Dichteinhomogenitäten auf einem homogenen Hintergrund, die nur stabil sind auf Längenskalen kleiner als die Jeans-Länge. In Abschnitt 3.3.4. wird eine exakte Lösung diskutiert, die man als einen einzelnen Puls auf einem homogenen Hintergrund interpretieren kann, der eine unendliche Dichte nach endlicher Zeit erreicht.

### 3.3.2. Der homogene Hintergrund

Da die Bäcklundtransformation (3.18) invariant ist unter der Austauschsymmetrie (3.27), die Quadraturen (3.21)...(3.25), die die Lösung des Gravitationssystems bestimmen, jedoch nicht invariant sind unter (3.27), kann man erwarten, daß (3.27) angewandt auf zwei Lösungen  $\alpha, \beta$ , eine neue Lösung des Gravitationssystems produziert.

(3.27) angewandt auf das Paar von Lösungen der sine-Gordon Gleichung  $\alpha = 0$  und  $\beta$  gegeben durch (3.34) ergibt

$$\beta = 0, \quad \alpha = 4 \arctan(e^{-\mu-\lambda+c}) \quad (3.43)$$

$$c = \text{const.}$$

Aus den Quadraturen (3.21)...(3.25) bekommt man damit:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{A}{1 - \frac{A}{2} (t - t_0)^2} \\ u &= \frac{-A}{1 - \frac{A}{2} (t - t_0)^2} (t - t_0) x \\ g &= \frac{A}{1 - \frac{A}{2} (t - t_0)^2} x \\ A, t_0 &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dies ist genau die homogene Lösung ( $\rho_x = 0$ ) des Systems (3.2). Im Unterschied zu einem dreidimensionalen homogenen Hintergrund (I.10) wird (3.44) in einer endlichen Zeit singulär.

### 3.3.3. Die Zwei-Soliton Lösung

In diesem Abschnitt wird die Zwei-Soliton Lösung diskutiert, die man aus der Zwei-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung erzeugen kann.

Mittels des Superpositionsprinzips (3.33) für Lösungen der sine-Gordon Gleichung kann man die Zwei-Soliton Lösung aus zwei Ein-Soliton Lösungen durch bloße algebraische Operationen konstruieren:

$$\alpha = 4 \arctan \theta_1 \quad (3.45a)$$

$$\beta = 4 \arctan \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{\theta_1 - \theta_2}{1 + \theta_1 \theta_2} \right) \quad (3.45b)$$

mit

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv c_1 e^{-\epsilon \lambda - \frac{1}{\epsilon} \mu} \\ \theta_2 &\equiv c_2 e^{\lambda + \mu} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$c_1, c_2, \epsilon = \text{const.}, \quad \epsilon \neq 0, \pm 1$$

$\beta$  repräsentiert zwei "Kinks" im  $(\lambda, \mu)$ -Raum, die sich mit einer Relativgeschwindigkeit  $\frac{1}{\epsilon^2}$  bewegen. Sind die Vorzeichen von  $c_1$  und  $c_2$  verschieden, dann ist  $\beta$  eine Soliton-Soliton Lösung, wenn sie gleich sind, dann ist  $\beta$  eine Soliton-Antisoliton Kombination (siehe Eilenberger 1981).

Die Integration von (3.21)...(3.25) kann explizit ausgeführt werden und ergibt folgende Parameterdarstellung der Lösung:

$$\rho = A \left[ \frac{\theta_2 (1 + \theta_1^2)}{(\epsilon + 1)^2 (\theta_1^2 \theta_2^2 + 1) + (\epsilon - 1)^2 (\theta_1^2 + \theta_2^2) + 8\epsilon \theta_1 \theta_2} \right]^2 \quad (3.47a)$$

$$g = \frac{\sqrt{2\gamma A}}{2(1 - \epsilon^2)} \frac{2\epsilon(1 + \theta_2^2)(\theta_1^2 - 1) + (\theta_2^2 - 1)(\theta_1^2 + 1)(1 + \epsilon^2)}{(\epsilon + 1)^2 (\theta_1^2 \theta_2^2 + 1) + (\epsilon - 1)^2 (\theta_1^2 + \theta_2^2) + 8\epsilon \theta_1 \theta_2} \quad (3.47b)$$

$$u = \frac{4\sqrt{\gamma} \epsilon \theta_1 (1 + \theta_2^2)}{(1 - \epsilon^2) \theta_2 (1 + \theta_1^2)} \quad (3.47c)$$

$$t = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{A}} \left[ -2\epsilon \ln \theta_1 - (\epsilon^2 + 1) \ln \theta_2 + 2\epsilon \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{1 + 2\theta_1 \theta_2 - \theta_2^2}{1 + \theta_1^2} \right] \quad (3.47d)$$

$$x = \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{A}(\epsilon^2 - 1)\theta_2^2(1 + \theta_1^2)^2} \left\{ -\theta_2^2(1 + \theta_1^2)(\epsilon^2 - 1)^2 \ln \theta_2 + \right. \\ \left. + 2\epsilon(1 + \theta_1\theta_2)(\theta_2 - \theta_1)[\theta_2(1 + \theta_1^2)(1 + \epsilon^2) + 2\epsilon\theta_1(1 + \theta_2^2)] \right\} \quad (3.47e)$$

$$A = \text{const.}$$

Triviale Integrationskonstanten, die von der Galilei-Invarianz der Gleichungen herrühren, wurden weggelassen.

Kontourplots von  $\rho(\lambda, \mu)$ ,  $u(\lambda, \mu)$  und  $t(\lambda, \mu)$  findet man in Abbildung 2. Daß (3.47) wirklich zwei lokalisierte Pulse beschreibt kann man schon erkennen, wenn man die Dichtekontour auf bestimmten  $t = \text{const.}$  Kurven betrachtet.

Durch eine Analyse der Extrema von  $\rho$  läßt sich dies auch direkt aus der Darstellung (3.47) zeigen. Die Kurven, auf denen  $\rho_x = 0$  ist, sind in der  $(\lambda, \mu)$ -Ebene gegeben durch

$$\rho_x = 0 \Leftrightarrow R_\lambda t_\mu = t_\lambda R_\mu \Leftrightarrow \sin \beta = 0 \quad (3.48).$$

Für  $\beta$  aus (3.45b) ergibt das drei Extrema:

$$\tan\left(\frac{\beta}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \quad (3.49a)$$

$$\tan\left(\frac{\beta}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \beta = \pi \Leftrightarrow (\epsilon - 1)(\theta_1 - \theta_2) = (\epsilon + 1)(1 + \theta_1\theta_2) \quad (3.49b)$$

$$\tan\left(\frac{\beta}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \beta = -\pi \Leftrightarrow (\epsilon - 1)(\theta_1 - \theta_2) = -(\epsilon + 1)(1 + \theta_1\theta_2) \quad (3.49c)$$

Das Extremum (3.49a) kann natürlich nur existieren, wenn die Vorzeichen der Konstanten  $c_1, c_2$  gleich sind, was im folgenden angenommen wird.

Die zweiten Ableitungen von  $\rho$  bezüglich  $x$  entlang den Kurven, für die  $\rho_x = 0$ , sind:

$$\beta = 0 : \rho_{xx}|_{\rho_x=0} = \frac{32}{J^2} \frac{(\epsilon - 1)^2}{\epsilon} \frac{\theta_1^2}{1 + \theta_1^2} |_{\beta=0} \quad (3.50a)$$

$$\beta = \pi : \rho_{xx}|_{\rho_x=0} = \frac{16}{J^2} \frac{1 - \theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)^2} (\theta_1 + \epsilon) \left(\theta_1 - \frac{1}{\epsilon}\right) |_{\beta=\pi} \quad (3.50b)$$

$$\beta = -\pi : \rho_{xx}|_{\rho_x=0} = \frac{16}{J^2} \frac{1 - \theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)^2} (\theta_1 - \epsilon) \left(\theta_1 + \frac{1}{\epsilon}\right) |_{\beta=-\pi} \quad (3.50c)$$

Für  $\epsilon > 1$  und  $c_1, c_2 > 1$  ist  $\beta = 0$  ein lokales Minimum und  $\beta = \pi, \beta = -\pi$  sind zwei lokale Maxima, da für (3.49b)  $\theta_1 > 1$  und für (3.49c)  $\theta_1 < 1$  sein muß, wenn  $\theta_2$  überall positiv ist.

Die Amplituden der Dichte auf den Extrema sind gegeben durch

$$\beta = 0 : \rho|_{\beta=0} = A \left[ \frac{\theta_1}{(1 + \epsilon^2)(1 + \theta_1^2)} \right]^2 \quad (3.51a)$$

$$\beta = \pi : \rho|_{\beta=\pi} = A \left[ \frac{(\epsilon^2 - 1)(\theta_1^2 - 1) - 4\epsilon\theta_1}{2(\epsilon^2 + 1)^2(\theta_1^2 + 1)} \right]^2 \quad (3.51b)$$

$$\beta = -\pi : \rho|_{\beta=-\pi} = A \left[ \frac{(\epsilon^2 - 1)(\theta_1^2 - 1) + 4\epsilon\theta_1}{2(\epsilon^2 + 1)^2(\theta_1^2 + 1)} \right]^2 \quad (3.51c)$$

was zeigt, daß asymptotisch entlang der Kurven  $\rho_x = 0$  die Dichte  $\rho$  bei dem lokalen Minimum gegen Null geht und auf den lokalen Maxima geht  $\rho$  gegen einen konstanten Wert:

$$\beta = \pi : \rho \rightarrow A \frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{4(\epsilon^2 + 1)^4} \quad \text{für } \theta_1 \rightarrow \infty \quad (3.52a)$$

$$\beta = -\pi : \rho \rightarrow A \frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{4(\epsilon^2 + 1)^4} \quad \text{für } \theta_1 \rightarrow 0 \quad (3.52b).$$

Um schließlich einen Eindruck zu bekommen, wie sich die beiden Pulse bewegen, kann man die Geschwindigkeit der Dichteextrema im  $(x, t)$ -Raum berechnen. Die Geschwindigkeit eines Punktes, der sich auf der Kurve  $x_s(t)$  bewegt, die bestimmt ist durch die Bedingung  $\rho_x = 0$  (äquivalent zu  $\sin \beta = 0$  in  $(\lambda, \mu)$ -Koordinaten), ist gegeben durch

$$\text{für } \cos \beta = +1 : \dot{x}_s = u + \sqrt{\gamma} \frac{\beta_\lambda + \beta_\mu}{\beta_\lambda - \beta_\mu} \Big|_{\sin \beta=0} \quad (3.53a)$$

$$\text{für } \cos \beta = -1 : \dot{x}_s = u + \sqrt{\gamma} \frac{\beta_\lambda - \beta_\mu}{\beta_\lambda + \beta_\mu} \Big|_{\sin \beta=0} \quad (3.53b).$$

Für die Lösung (3.45), (3.47) ergibt das folgende Geschwindigkeiten der Extrema:

$$\text{Minimum: } \dot{x}_s|_{\beta=0} = \sqrt{\gamma} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \quad (3.54a)$$

$$\text{Maxima: } \dot{x}_s|_{\beta=\pm\pi} = \frac{\sqrt{\gamma}\theta_1(1+\epsilon^2)[(\theta_1^2-1)(\epsilon^6-11\epsilon^4+11\epsilon^2-1)+12\epsilon\theta_1(1+\epsilon^4)]}{[\theta_1(\epsilon+1)\pm(\epsilon-1)][\theta_1(\epsilon-1)\mp(\epsilon+1)][\epsilon\theta_1-1][\epsilon+\theta_1](\epsilon^2-1)^2} \quad (3.54b).$$

Daraus ist ersichtlich, daß das Minimum sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, deren Verhältnis zur Schallgeschwindigkeit  $\sqrt{\gamma}$  alleine durch die freie Konstante  $\epsilon$  bestimmt wird. Für  $\epsilon > 1$  ist die Geschwindigkeit des Minimums stets kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeiten der lokalen Maxima haben immer entgegengesetztes Vorzeichen. Die Nullstellen des Zählers in (3.54b) bestimmen die Punkte, wo eine Annäherung der beiden Pulse in eine Entfernung umschlägt. Asymptotisch gehen deren Geschwindigkeiten gegen Null.

### 3.3.4. Puls auf einem homogenen Hintergrund

Wendet man die Austauschsymmetrie (3.27) auf die Ein- und Zwei-Soliton Lösung der sine-Gordon Gleichung (3.47a), (3.47b) an, kann man eine Lösung des Gravitationssystems erzeugen, die völlig andere Eigenschaften hat, als die im letzten Abschnitt diskutierte Zwei-Soliton Lösung.

Startet man mit dem Paar

$$\alpha = 4 \arctan \left[ \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right) \frac{\eta_1 - \eta_2}{1 + \eta_1 \eta_2} \right] \quad (3.55a)$$

$$\beta = 4 \arctan(\eta_1) \quad (3.55b)$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_1 &\equiv c_1 e^{\epsilon\lambda + \frac{1}{\epsilon}\mu} \\ \eta_2 &\equiv c_2 e^{-\lambda - \mu} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$c_1, c_2, \epsilon = \text{const.}, \quad \epsilon \neq 0, \pm 1$$

dann ergibt die Integration der Quadraturen (3.21)...(3.25) die Parameterdarstellung einer neuen Lösung:

$$\rho = A \left[ \frac{(\eta_1^2 \eta_2^2 + 1)(\epsilon + 1)^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)(\epsilon - 1)^2 + 8\epsilon \eta_1 \eta_2}{\eta_2(1 + \eta_1^2)} \right]^2 \quad (3.57a)$$

$$g = \sqrt{A\gamma} \left[ -4\sqrt{2}\epsilon \ln \eta_1 - 2\sqrt{2}(\epsilon^2 + 1) \ln \eta_2 + 4\sqrt{2}\epsilon \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1 + 2\eta_1 \eta_2 - \eta_2^2}{1 + \eta_1^2} \right] \quad (3.57b)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\sqrt{\gamma}}{\epsilon^2 - 1} \left[ (\eta_1^2 \eta_2^2 + 1)(\epsilon + 1)^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)(\epsilon - 1)^2 + 8\epsilon \eta_1 \eta_2 \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ [-2\epsilon \ln \eta_1 - (\epsilon^2 + 1) \ln \eta_2] [(\eta_1^2 \eta_2^2 - 1)(\epsilon + 1)^2 + (\eta_2^2 - \eta_1^2)(\epsilon - 1)^2] - \right. \\ &\quad - \eta_1^2 \eta_2^2 (\epsilon + 1)^2 (\epsilon^2 - 4\epsilon + 1) - \eta_1^2 (1 - \epsilon)^2 (\epsilon^2 + 4\epsilon + 1) - \\ &\quad \left. - \eta_2^2 (\epsilon^2 + 1)(\epsilon - 1)^2 - (2\epsilon^3 + 2\epsilon^2 + 2\epsilon + 1) \right\} \end{aligned} \quad (3.57c)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2A}(1 - \epsilon^2)} \left[ \frac{2\epsilon(1 + \eta_2^2)(\eta_1^2 - 1) + (1 + \eta_1^2)(\eta_2^2 - 1)(\epsilon^2 + 1)}{(\eta_1^2\eta_2^2 + 1)(\epsilon + 1)^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)(\epsilon - 1)^2 + 8\epsilon\eta_1\eta_2} \right] \quad (3.57d)$$

Die Kontourplots von  $\rho(\lambda, \mu)$ ,  $u(\lambda, \mu)$ ,  $t(\lambda, \mu)$  findet man in Abbildung 3.

Da die Extrema der Dichte durch  $\rho_x = 0 \Leftrightarrow \sin \beta = 0$  gegeben sind, hat die Lösung (3.57) nur ein einziges lokales Extremum bei

$$\beta = \pi \Leftrightarrow \eta_1 = 1 \quad (3.58).$$

Die zweite Ableitung von  $\rho$  auf den Kurven  $\eta_1 = 1$  lautet

$$\rho_{xx}|_{\eta_1=1} = \frac{-16}{J^2} \frac{\epsilon^2 + 1}{\epsilon} \frac{2(\eta_2\epsilon + 1)(\eta_2 + \epsilon)}{(\epsilon^2 + 1)(\eta_2^2 + 1) + 4\epsilon\eta_2} \quad (3.59).$$

Wenn  $\eta_2 > 0$  und  $\epsilon > 0$  gilt, hat  $\rho$  somit ein einziges lokales Maximum. Der Wert von  $\rho$  auf diesem Maximum ist

$$\rho|_{\eta_1=1} = A \left[ \frac{(\eta_2^2 + 1)(\epsilon^2 + 1) + 4\epsilon\eta_2}{\eta_2} \right]^2 \quad (3.60).$$

Für  $\eta_2 \rightarrow 0$  und für  $\eta_2 \rightarrow \infty$  divergiert die Dichte längs der Kurven, auf denen  $\rho_x = 0$  ist. Betrachtet man  $t(\lambda, \mu)$  auf diesen Kurven

$$t|_{\eta_1=1} = \frac{1}{\sqrt{2A}} \frac{1 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \frac{\eta_2^2 - 1}{(\eta_2^2 + 1)(\epsilon^2 + 1) + 4\epsilon\eta_2} \quad (3.61)$$

so sieht man, daß der asymptotische Bereich  $\eta_2 \rightarrow 0$ ,  $\eta_2 \rightarrow \infty$  jeweils zu einer *endlichen* Zeit gehört

$$t|_{\eta_1=1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2A}(1 - \epsilon^2)} \quad \text{für } \eta_2 \rightarrow \infty \quad (3.62a)$$

$$t|_{\eta_1=1} = \frac{-1}{\sqrt{2A}(1 - \epsilon^2)} \quad \text{für } \eta_2 = 0 \quad (3.62b)$$

Die zwei Zeiten (3.62a,b) mit umgekehrten Vorzeichen gibt es nur, weil das ursprüngliche Gleichungssystem invariant ist unter Spiegelungen der Zeitachse. Dies bedeutet, daß der Puls mit Maximum bei  $\eta_1 = 1$  in einer endlichen Zeit, gegeben durch (3.62), eine unendlich hohe Dichte erreicht.

Eine Untersuchung der Lösung bei  $t = 0$  ergibt, daß man sie interpretieren kann, als einen Puls, der sich auf einem homogenen Hintergrund bewegt. Für  $\epsilon\lambda + \frac{1}{\epsilon}\mu \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \eta_1 \rightarrow 0$  geht  $\beta$  gegen 0 und  $\alpha$  geht gegen  $4 \arctan(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\eta_2)$ , was genau die Form der Lösungen ist, die den homogenen Hintergrund erzeugt, siehe 3.3.2..  $t = 0$  ist in der  $(\lambda, \mu)$ -Ebene bestimmt durch

$$\eta_2^2 = \frac{(1-\epsilon)^2\eta_1^2 + (1+\epsilon)^2}{(1+\epsilon)^2\eta_1^2 + (1-\epsilon)^2} \quad (3.63).$$

Die Dichteverteilung auf der  $t = 0$  Hyperfläche geht in den beiden asymptotischen Bereichen  $\eta_1 \rightarrow 0$  und  $\eta_1 \rightarrow \infty$ , die einfach  $x \rightarrow \pm\infty$  entsprechen, gegen eine Konstante

$$\rho|_{t=0} \rightarrow 4A(1-\epsilon^2)^2 \text{ für } |x| \rightarrow \infty \quad (3.64).$$

Der maximale Wert der Dichte auf  $t = 0$  ist

$$\rho|_{t=0, \eta_1=1} = 4A(1+\epsilon)^4 \quad (3.65).$$

Die freie Konstante  $\epsilon$  kann assoziiert werden mit einem Dichtekontrast bei  $t = 0$

$$\delta|_{t=0} \equiv \frac{\rho_{max} - \rho_{hintergr.}}{\rho_{hintergr.}} \quad (3.66)$$

Mit (3.64) und (3.65) hat man

$$\delta|_{t=0} = \frac{4\epsilon}{(\epsilon-1)^2} \quad (3.67)$$

Die zwei frei wählbaren Konstanten  $\epsilon$  und  $A$  sind somit bestimmt durch Vorgabe des Dichtekontrastes bei  $t = 0$  (3.67) und der Hintergrunddichte (3.64). Die Zeit nach der die Dichte unendlich wird ist allerdings alleine bestimmt durch den Hintergrundwert (3.64).

### 3.3.5. Breather I

Weil das mit der sine-Gordon Gleichung über die "inverse scattering" Transformation assoziierte Eigenwertproblem nicht selbstadjungiert ist, gibt es Anfangsbedingungen mit zwei konjugiert komplexen, diskreten Eigenwerten. Die dazugehörige Lösung kann interpretiert werden als ein gebundener Zustand zweier Solitonen, die gegeneinander oszillieren (genannt "breather" Lösung). Gewöhnlich bekommt man diese Lösung durch eine analytische Fortsetzung der Zwei-Soliton Lösung (3.45b) zu komplexen  $\epsilon$ -Werten (siehe Eilenberger 1981, Lamb 1980).

Aber für den hier diskutierten Lösungserzeugungsmechanismus benötigt man stets zwei Lösungen der sine-Gordon Gleichung und es zeigt sich, daß es keine reelle Lösung gibt, die man mittels der auto-Bäcklundtransformation (3.18) aus der allgemeinen "breather"-Lösung erzeugen könnte. Nur für den Grenzfall des "breather", für den die Oszillationsfrequenz der gebundenen Solitonen unendlich groß wird, gibt es eine zweite reelle Lösung.

Damit hat man das Paar

$$\alpha = 4 \arctan(\zeta_1) \quad (3.68a)$$

$$\beta = 4 \arctan\left(\frac{2\zeta_1\zeta_2}{1 + \zeta_1^2}\right) \quad (3.68b)$$

mit

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= e^{\lambda + \mu + c_1} \\ \zeta_2 &= \lambda - \mu + c_2 \\ c_1, c_2 &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Diese Lösung enthält nur zwei triviale Phasenkonstanten,  $c_1$  und  $c_2$ , die im folgenden keine physikalische Bedeutung bekommen.

Die entsprechende Lösung des Gravitationssystems (3.2) erzeugt durch (3.21)...(3.25) lautet dann:

$$\rho = A \left[ \frac{\zeta_1(1 + \zeta_1^2)}{(\zeta_1^2 + 1)^2 + 4\zeta_1^2\zeta_2^2} \right]^2 \quad (3.70a)$$

$$g = 2\sqrt{2\gamma A} \frac{\zeta_1^2\zeta_2}{(\zeta_1^2 + 1)^2 + 4\zeta_1^2\zeta_2^2} \quad (3.70b)$$

$$u = 2\sqrt{\gamma} \zeta_2 \frac{1 - \zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \quad (3.70c)$$

$$t = 2\sqrt{\frac{2}{A}} \left[ \zeta_2^2 \frac{\zeta_1^2 - 1}{\zeta_1^2 + 1} - \ln \zeta_1 \right] \quad (3.70d)$$

$$x = 2\sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \left[ \zeta_2 - \frac{4}{3} \zeta_2^3 \frac{1 - \zeta_1^2 + \zeta_1^4}{(1 + \zeta_1^2)^2} \right] \quad (3.70e)$$

$$A = \text{const.}$$

Triviale Integrationskonstanten wurden wieder weggelassen. Die zu (3.70) gehörigen Kontourplots findet man in Abbildung 4a. Alle physikalischen Größen in (3.70) sind endlich in der gesamten  $(\lambda, \mu)$ -Ebene.

Die Dichteverteilung (3.70a) hat drei *lokale Extrema* ( $\rho_x = 0$ ):

$$\beta = 0 : \zeta_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (3.71a)$$

$$\beta = +\pi : \zeta_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta_1} (1 + \zeta_1^2) \quad (3.71b)$$

$$\beta = -\pi : \zeta_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\zeta_1} (1 + \zeta_1^2) \quad (3.71c).$$

Die zweiten Ableitungen von  $\rho$  auf diesen Kurven sind

$$\rho_{xx}|_{\beta=0} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\zeta_1^2}{(1 + \zeta_1^2)^2} < 0 \quad (3.72a)$$

$$\rho_{xx}|_{\beta=\pm\pi} = -\frac{1}{16\gamma} \frac{\zeta_1^4}{(1 - \zeta_1^4)^2} < 0 \quad (3.72b).$$

(3.72) zeigt, daß es in jedem Fall nur lokale Maxima gibt ohne dazwischenliegende Minima. Das ist natürlich nur möglich für eine Funktion mit bestimmten Diskontinuitäten zwischen den Maxima.

Eine Analyse der Singularitäten der Koordinatentransformation zwischen den  $(x, t)$ -Koordinaten und den charakteristischen Koordinaten zeigt, daß zwischen den Kurven der Maxima (3.71) die Kurven liegen, für die  $J = 0$  ist. Die Kurven auf denen  $J = 0$  —  $J$  gegeben durch (3.26) — sind mit (3.68)

$$\zeta_2 = \pm \frac{1}{2}(1 + \zeta_1^2) \quad (3.73a)$$

$$\zeta_2 = \pm \frac{1}{\zeta_1^2}(1 + \zeta_1^2) \quad (3.73b)$$

(3.73a) und (3.73b) schneiden sich bei  $(\zeta_1 = 1, \zeta_2 = \pm 1)$ . Die Kurven, auf denen die Maxima propagieren  $\beta = \pm\pi$  schneiden die Kurven  $J = 0$  ebenso bei  $(\zeta_1 = 1, \zeta_2 = \pm 1)$ . Für alle anderen Werte von  $(\zeta_1, \zeta_2)$  liest man aus (3.73) und (3.71) ab, daß zwischen den Maxima immer eine Kurve verläuft, auf der  $J = 0$  ist.

Da die Dichte im gesamten  $(\zeta_1, \zeta_2)$ -Raum endlich ist, können die Diskontinuitäten bei  $J = 0$  nur in den Ableitungen der physikalischen Größen auftauchen. Berechnet man sich zum Beispiel  $\rho_x$ , so hat dieser Ausdruck stets ein  $J$  im Nenner, was zu unendlich großen Gradienten führt.

(3.70d,e) zeigen, daß  $\zeta_1 = 1$  der Kurve  $t = 0$  in der  $(x, t)$ -Ebene entspricht und  $\zeta_2 = 0$  entspricht  $x = 0$ . Zum Beispiel für die Anfangsbedingung bei  $t = 0$  sind alle Größen als Funktion von  $x$ , parametrisiert durch  $\zeta_2$ , gegeben durch

$$\rho|_{t=0} = A \left[ \frac{1}{2(1 + \zeta_2^2)} \right]^2 \quad (3.74a)$$

$$g|_{t=0} = \sqrt{\frac{\gamma A}{2}} \frac{\zeta_2}{1 + \zeta_2^2} \quad (3.74b)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (3.74c)$$

$$x = 2 \sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \left( \zeta_2 - \frac{1}{3} \zeta_2^3 \right) \quad (3.74d)$$

Auf der Kurve  $x = 0$  (zentrales Maximum) läßt sich die Transformation zwischen physikalischen Koordinaten und charakteristischen Koordinaten sogar explizit umkehren:

$$\zeta_1 = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{2}} t \right] \quad (3.75a)$$

$$\rho|_{x=0} = \frac{1}{4} A \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{2}} t \right] \quad (3.75b)$$

$$g|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0 \quad (3.75c)$$

Die Amplitude des zentralen Pulses nimmt also exponentiall in der Zeit ab, wobei die typische Zeitskala von der selben Konstanten  $A$  bestimmt ist, wie die typische Breite des Pulses (siehe (3.78)).

Das asymptotische Verhalten für  $t \rightarrow \pm\infty$  bekommt man aus der Parameterdarstellung, wenn man  $\zeta_1 \rightarrow 0, \infty$  gehen läßt.

Die Werte von  $\rho$  auf allen drei Extrema

$$\beta = 0 : \quad \rho = A \frac{\zeta_1^2}{(1 + \zeta_1^2)^2} \quad (3.76a)$$

$$\beta = \pm\pi : \quad \rho = \frac{1}{4} A \frac{\zeta_1^2}{(1 + \zeta_1^2)^2} \quad (3.76b)$$

gehen asymptotisch gegen Null längs der Kurven, auf denen sie propagieren.

Die Geschwindigkeit der zentralen Verdichtung bei  $x = 0$  ( $\Leftrightarrow \zeta_2 = 0$ ) ist Null

$$\dot{x}_s|_{\beta=0} = 0 \quad (3.77a)$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der zwei Maxima bei  $\beta = \pm\pi$  ist

$$\dot{x}_s|_{\beta=\pm\pi} = \sqrt{\gamma} \frac{1 + \zeta_1^4}{\zeta_1(1 - \zeta_1^2)} \quad (3.77b)$$

das heißt, die beiden Pulse haben stets entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit vom gleichen Betrag.

Zusammenfassend zeigt diese Diskussion, daß die Lösung (3.70) drei Pulse in der Dichte beschreibt, die jeweils durch unendliche Gradienten getrennt sind. Der zentrale Puls bei  $x = 0$  ist stets in Ruhe und die zwei anderen lokalen Maxima bewegen sich mit entgegengesetzter Geschwindigkeit auf die zentrale Verdichtung zu (siehe Abbildung 4b). Bei  $t = 0$  fallen die beiden Pulse mit nichtverschwindender Geschwindigkeit mit den Diskontinuitäten  $J = 0$  zusammen und das Geschwindigkeitsfeld verschwindet. Das

Maximum der Dichte bei  $t = 0$ ,  $x = 0$  ist bestimmt durch eine freie Konstante, und die Breite des ruhenden Pulses ist

$$\frac{8}{3} \sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \quad (3.78)$$

was etwas vom entsprechenden Amplitude/Breite Verhältnis der Ein-Soliton Lösung (Abschnitt 3.3.1.) abweicht.

Für  $t \rightarrow \infty$  ( $\zeta_1 \rightarrow 0$ ) entfernen sich die Maxima bei  $\beta = \pm\pi$  von der zentralen Verdichtung und das Geschwindigkeitsfeld erreicht eine zeitunabhängige Verteilung, die für  $|x| \rightarrow \infty$  divergiert:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow 2\sqrt{\gamma}\zeta_2 \quad \text{für } \zeta_1 \rightarrow 0 \\ x &\rightarrow 2\sqrt{2\gamma}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\zeta_2 - \frac{4}{3}\zeta_2^3\right) \quad \text{für } \zeta_1 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Da das Gravitationssystem zeitumkehrinvariant ist, kann man diese Lösung interpretieren als zwei Pulse, die aus dem Unendlichen auf eine Verdichtung zulaufen und bei  $t = 0$  Diskontinuitäten in den Gradienten erzeugen, oder als zwei Pulse, die bei  $t = 0$  aus solchen Diskontinuitäten entstehen und ins Unendliche propagieren.

### 3.3.6. Breather II

Die Austauschtransformation (3.27) angewandt auf den Grenzfall der "breather" Lösung (3.68) ergibt eine neue Lösung mit völlig anderen Eigenschaften als (3.70).

Ausgehend von

$$\alpha = 4 \arctan\left(\frac{2\chi_1\chi_2}{1+\chi_1^2}\right) \quad (3.80a)$$

$$\beta = 4 \arctan(\chi_1) \quad (3.80b)$$

mit

$$\chi_1 \equiv e^{-\lambda-\mu+c_1} \quad (3.81)$$

$$\chi_2 \equiv \mu - \lambda + c_2$$

$$c_1, c_2 = \text{const.}$$

ergibt sich die Lösung des Gravitationssystems:

$$\rho = A \left[ \frac{(1+\chi_1^2)^2 + 4\chi_1^2\chi_2^2}{\chi_1(1+\chi_1^2)} \right]^2, \quad A = \text{const.} \quad (3.82a)$$

$$u = 2\sqrt{\gamma} \chi_2 \frac{4\chi_1^2 \ln \chi_1 + \chi_1^4 - 1}{(1+\chi_1^2)^2 + 4\chi_1^2\chi_2^2} \quad (3.82b)$$

$$g = 2\sqrt{2\gamma A} \left[ \chi_2^2 \frac{\chi_1^2 - 1}{\chi_1^2 + 1} - \ln \chi_1 \right] \quad (3.82c)$$

$$t = 2\sqrt{\frac{2}{A}} \frac{\chi_1^2\chi_2}{(1+\chi_1^2)^2 + 4\chi_1^2\chi_2^2} \quad (3.82d)$$

$$x = \sqrt{\frac{\gamma}{2A}} \frac{16\chi_1^4\chi_2^2 \ln \chi_1 - (1+\chi_1^2)^2(\chi_1^2 - 1)}{[(1+\chi_1^2)^2 + 4\chi_1^2\chi_2^2]^2} \quad (3.82e)$$

Abbildung 5 enthält die Kontourplots dieser Lösung.

Die Dichteverteilung hat wiederum nur ein *lokales Extremum* bei

$$\rho_x = 0 \iff \chi_1 = 1 \quad (3.83)$$

was einfach  $x = 0$  in der  $(x, t)$ -Ebene ist.

Die zweite Ableitung an dieser Stelle ist

$$\rho_{xx}|_{\chi_1=1} = \frac{16}{\gamma} \frac{(1 + \chi_1^2)^3}{1 - \chi_2^2} \quad (3.84)$$

Einer Variation von  $\chi_2$  entlang  $\chi_1 = 1$  entspricht einer Variation der Zeit  $t$ . Für das Zeitintervall, für das  $|\chi_2| < 1$  ist, gibt es ein Minimum bei  $x = 0$  und für  $|\chi_2| > 1$  wird dies ein lokales Maximum. Die Transformation zwischen charakteristischen Koordinaten und  $(x, t)$ -Koordinaten wird singulär bei

$$\chi_2 = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_1^2} (1 + \chi_1^2) \quad (3.85a)$$

$$\chi_2 = \pm \frac{1}{2} (1 + \chi_1^2) \quad (3.85b)$$

was zeigt, daß  $J = 0$  zu den Zeiten, wo das Extremum bei  $x = 0$  von einem Minimum in ein Maximum umschlägt oder umgekehrt.

Eine andere fremdartige Eigenschaft dieser Lösung ist die Tatsache, daß sie nur für einen begrenzten Bereich des  $(x, t)$ -Raumes existiert, wie aus (3.82d,e) ersichtlich ist.

Zum Beispiel bei  $\underline{t=0}$  ( $\chi_2 = 0$ ) kann man die Transformation explizit invertieren und man bekommt

$$\chi_1^2 = \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{2A}} - x}{\sqrt{\frac{\gamma}{2A}} + x} \quad (3.86a)$$

$$\rho|_{t=0} = \frac{4A}{1 - \frac{2A}{\gamma} x^2} \quad (3.86b)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (3.86c)$$

$$g|_{t=0} = \sqrt{2\gamma A} \ln \left[ \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{2A}} - x}{\sqrt{\frac{\gamma}{2A}} + x} \right] \quad (3.86d)$$

Die Lösung ist somit nur physikalisch sinnvoll im Intervall

$$-\sqrt{\frac{\gamma}{2A}} < x < +\sqrt{\frac{\gamma}{2A}} \quad (3.87).$$

An den Rändern geht die Dichte gegen unendlich. Dieses endliche  $x$ -Intervall (3.87) wird abgebildet auf ein unendliches Intervall im  $(\lambda, \mu)$ -Raum:  $-\infty < \lambda + \mu < \infty$ .

Entlang  $x = 0$  bekommt man explizit

$$t = \frac{1}{\sqrt{2A}} \frac{\chi_2}{1 + \chi_2^2} \quad (3.88a)$$

$$g|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0 \quad (3.88b)$$

$$\rho|_{x=0} = \frac{1}{4At^4} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8At^2} \right]^2 \quad (3.88c)$$

Bei  $x = 0$  ( $\chi_1 = 1$ ) existiert die Lösung nur für ein endliches Zeitintervall

$$|t| < \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{A}} \quad (3.89)$$

das auf die Gebiete  $|\chi_2| > 1$  bzw.  $|\chi_2| < 1$  abgebildet wird. An den Grenzen wechselt das Extremum bei  $x = 0$  seinen Charakter.

Es ist wohl etwas schwierig, eine physikalische Interpretation für diese Lösung zu finden. Sie könnte benutzt werden zur Beschreibung eines Gases, das zwischen zwei Ebenen unendlich großer Dichte eingeschlossen ist. Bemerkenswert ist wiederum die Beziehung zwischen dem Abstand dieser Ebenen unendlicher Dichte bei  $t = 0$  — gegeben durch (3.87) — und dem minimalen Wert  $\rho(0,0) = 4A$ , gegeben durch (3.86b). Dies ist eine ähnliche Relation wie das Amplitude/Breite Verhältnis der Ein-Soliton Lösung.

#### 4. Ein Modell für den Gravitationskollaps mit Druck in zwei räumlichen Dimensionen

In Abschnitt 3 wurde zwar gezeigt, daß man das Gravitationssystem (I.8) für ebene Symmetrie und isotherme Zustandsgleichung vollständig lösen kann, doch bedeutet die Symmetrieannahme eine wesentliche Restriktion. Man fragt sich, ob man die dort gewonnenen Resultate in irgendeiner Weise auf mehrere räumliche Dimensionen verallgemeinern kann. Die Prozedur der Transformation auf charakteristische Koordinaten kann man für mehr als zwei unabhängige Variable nicht sinnvoll anwenden.

Die physikalische Motivation für Modelle mit Druck in mehr als einer Dimension liegt ebenso in der hochgradigen Anisotropie bei der Verdichtung der Materie zu den heute beobachteten Strukturen im Universum. Es wäre zum Beispiel wünschenswert, wenn man definitive Aussagen darüber hätte, welchen Einfluß der Gasdruck auf den "pancake"-Kollaps hat. Zwar ist für die großen Skalen der zuerst kollabierenden Objekte im baryondominierten Szenarium und dem Neutrino-dominierten Modell verschwindender Gasdruck eine gute Näherung, dennoch wäre es wichtig zu wissen, ob der Gasdruck auf kleinen Skalen die Eindimensionalität der Bewegung nicht wesentlich beeinträchtigt. Gewöhnlich wird angenommen, daß der Gasdruck lediglich die singulären Hyperflächen, die das druckfreie Modell vorhersagt, "verschmiert", das heißt, man glaubt, die großräumige Struktur der Dichtemaxima bleibt ungeändert, der Druck beseitigt nur unphysikalische Singularitäten. Es könnte aber sein, daß ein isotroper Druck zumindest lokal die vorherrschende Bewegung der Materie in einer Richtung auf die "pancake"-Ebene hin, aufhebt oder doch entscheidend modifiziert. Man ist daran interessiert, ob "pancake"-artige Strukturen auch in einem Modell unter Berücksichtigung des Gasdrucks entstehen können. Außerdem wäre es von Interesse, zu wissen, ob bei  $p \neq 0$  ebenso Singularitäten in einer endlichen Zeit auftreten können — eine bislang ungeklärte Frage.

In diesem Abschnitt wird eine zeitabhängige Lösung von (I.8) diskutiert, die translationsinvariant in einer räumlichen Richtung ( $z$ ) ist. Die Einschränkung auf zwei räumliche Dimensionen geschieht nur aus Gründen der Einfachheit. Andererseits erwartet man daß aus der druckfreien Phase des Verdichtungsprozesses nicht nur flache "pancakes" hervorgehen, sondern auch filamentartige Strukturen. Dies ist stets in einem gewissen Gebiet möglich, wo die Kontraktionsrate in zwei räumlichen Richtungen groß ist im Vergleich zur Kontraktionsrate in der dritten Richtung. In Abschnitt 5 werden dann Teile aus diesem Abschnitt auf drei Dimensionen verallgemeinert. Diese zweidimensionale Lösung kann man als Modell eines hochgradig anisotropen Gravitationskollaps unter Berücksichtigung von Druckeffekten ansehen.

Zunächst wird die Lösung konstruiert aus der Lösung des hydrostatischen Gleichgewichts mittels einer zeitabhängigen, konformen Transformation (Abschnitt 4.1.), dann wird an einem Beispiel demonstriert (Abschnitt 4.2.), daß die Materiedichte nur auf bestimmten Hyperflächen in der Zeit anwachsen kann, die gegeben sind als Nullstellen einer Lösung der Laplace-Gleichung. Danach folgt die allgemeine Diskussion der Lösung (Abschnitt 4.3.), wobei gezeigt wird, daß die typischen Eigenschaften des Beispiels in Abschnitt 4.2. für alle Dichteverteilungen auftreten, die überall im Raum regulär sind.

#### 4.1. Eine Lösung

Ausgehend vom hydrostatischen Gleichgewicht in zwei räumlichen Dimensionen (Translationsinvarianz in einer räumlichen Richtung), das bestimmt ist durch eine Liouville-Gleichung, wird deren Invarianz unter konformen Transformationen in der  $(x, y)$ -Ebene benutzt um die Lösung zeitabhängig zu machen. Es verbleiben dann die Kontinuitätsgleichung und die beiden Euler-Gleichungen, die Restriktionen für die konforme Transformation liefern. Die Zeitentwicklung derselben ist bestimmt durch eine nichtlineare Gleichung zweiter Ordnung, deren zwei frei wählbare Funktionen zusammen mit einer weiteren Funktion, die Lösung einer Laplace-Gleichung sein muß, die verbleibenden Freiheitsgrade in der Wahl der Anfangsbedingungen bilden.

Die Symmetrieannahmen implizieren

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (u(x, y, t), v(x, y, t), 0) \\ \rho_z &= \Phi_z = g_z = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Die Zustandsgleichung sei wiederum die eines isothermen Gases wie in (3.1). Damit lautet (I.8), geschrieben für  $\rho, u, v, \Phi$ :

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0\tag{4.2a}$$

$$u_t + uu_x + vv_y = -\Phi_x - \gamma \frac{\rho_x}{\rho}\tag{4.2b}$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -\Phi_y - \gamma \frac{\rho_y}{\rho}\tag{4.2c}$$

$$\Delta\Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \rho\tag{4.2d}$$

Zunächst soll die Lösung des hydrostatischen Gleichgewichts bestimmt werden. Mit

$$u = v = 0, \quad \rho_t = 0\tag{4.3}$$

ist dieses determiniert durch:

$$\begin{aligned}\Phi + \gamma \ln \rho &= \gamma \ln c, \quad c = \text{const.} \\ \Delta\Phi &= \rho\end{aligned}\tag{4.4}$$

woraus eine Gleichung für  $\Phi$  alleine folgt:

$$\Delta \Phi = c e^{-\frac{1}{\gamma} \Phi} \quad (4.5a)$$

$$\rho = c e^{-\frac{1}{\gamma} \Phi} \quad (4.5b)$$

(4.5a) ist eine sogenannte *Liouville-Gleichung* (Goursat 1896, Ablowitz 1987), deren explizite, integralfreie Lösung bekannt ist. Man kann zeigen (zum Beispiel mittels einer Bäcklund-Transformation, siehe Anderson/Ibragimov 1979), daß alle Lösungen von (4.5a) durch eine zweidimensionale Laplace-Gleichung erzeugt werden können. In der Literatur wird die Lösung der Liouville-Gleichung (4.5a,b) gewöhnlich wie folgt dargestellt:

$$\rho = -2\gamma \frac{f_x^2 + f_y^2}{f^2} \quad (4.6)$$

$$\text{mit } \Delta f = 0$$

Diese Form ist für die Diskussion jedoch unzuweckmäßig, da für reelle Lösungen der Laplace-Gleichung stets  $\rho < 0$  gilt. Um zu einer Darstellung zu gelangen, für die  $\rho > 0$  ist, für reelle Lösungen der Laplace-Gleichung, führt man folgende Transformation durch:

$$f = \cosh(h) e^{ik} \quad (4.7)$$

wobei  $h$ ,  $k$  Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind:

$$h_x = k_y$$

$$h_y = -k_x \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \Delta h = \Delta k = 0$$

(4.7), (4.8) in (4.6) eingesetzt, ergibt eine Form der Lösung der Liouville-Gleichung, die nur noch  $h$  enthält und die für reelles  $h$  eine positive Dichte impliziert:

$$\rho = 2\gamma \frac{h_x^2 + h_y^2}{\cosh^2(h)} \quad (4.9)$$

$$\Delta h = 0$$

(4.9) zusammen mit (4.4), durch das  $\Phi$  bestimmt ist, ist die *allgemeine Lösung des hydrostatischen Gleichgewichts in zwei Dimensionen*.  $c$  in (4.4) ist eine bedeutungslose Konstante, da sie im Ausdruck für  $\rho$  nicht auftritt.

(4.9) ist das zweidimensionale Analogon der Ein-Soliton Lösung im eindimensionalen Fall, da letztere nur die galileitransformierte Lösung des hydrostatischen Gleichgewichts

in 1-D ist. Für  $h = Bx$ ,  $B = \text{const}$ , wird (4.9) die auf das Ruhesystem transformierte Ein-Soliton Lösung (3.35).

Im Zusammenhang mit der Evolution von Dichteinhomogenitäten ist man natürlich interessiert an *zeitabhängigen Dichteverteilungen*. Im folgenden wird gezeigt, wie man aus (4.9) eine Lösung mit  $\rho_t \neq 0$  konstruieren kann, die ein interessantes Kollapsverhalten zeigt.

Zunächst führt man eine konforme, zeitabhängige Transformation der  $(x, y)$ -Koordinaten ein ( $t$  bleibt dabei unverändert):

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \Omega(x, y, t) \\ \hat{y} &= \Psi(x, y, t)\end{aligned}\tag{4.10a}$$

mit

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Psi_y \\ \Omega_y &= -\Psi_x \\ \Rightarrow \Delta\Omega &= \Delta\Psi = 0\end{aligned}\tag{4.10b}$$

unter der die Liouville-Gleichung invariant ist, wenn man  $\Phi$  transformiert wie

$$\hat{\Phi} = \Phi + \gamma \ln J\tag{4.11}.$$

$J$  ist die Jacobideterminante der Transformation (4.10)

$$J \equiv \Omega_x^2 + \Omega_y^2 = \Psi_x^2 + \Psi_y^2\tag{4.12}$$

Der Laplace-Operator transformiert sich wie

$$\partial_{xx} + \partial_{yy} = J(\partial_{\hat{x}\hat{x}} + \partial_{\hat{y}\hat{y}})\tag{4.13}.$$

Damit gilt für  $\hat{\Phi}$ :

$$\Delta_{(\hat{x}, \hat{y})} \hat{\Phi} = c e^{-\frac{1}{\gamma} \hat{\Phi}}\tag{4.14}.$$

Die Beziehung zwischen  $\Phi$  und  $\rho$  (4.4) soll erhalten bleiben, was für  $\rho$  folgende Gestalt impliziert:

$$\rho = 2\gamma J \frac{h_{\hat{x}}^2 + h_{\hat{y}}^2}{\cosh^2(h)} \quad (4.15)$$

$$\text{mit } h_{\hat{x}\hat{x}} + h_{\hat{y}\hat{y}} = 0$$

Die Positivität der Dichte ist garantiert, wenn die konforme Transformation (4.10) reell ist, weil dann  $J$  (4.12) stets positiv ist.

(4.15) wird in die Kontinuitätsgleichung (4.2a) eingesetzt, wobei man fordert, daß  $h(\hat{x}, \hat{y})$  frei wählbar sein soll. Das bedeutet, daß alle Koeffizienten der Terme die

$$\frac{h_{\hat{x}}^2 + h_{\hat{y}}^2}{\cosh^2(h)}$$

und dessen Ableitungen enthalten, verschwinden müssen. Dies ergibt dann drei Gleichungen für  $\Omega$ ,  $\Psi$ ,  $J$  :

$$\Omega_t + u\Omega_x + v\Omega_y = 0 \quad (4.16a)$$

$$\Psi_t + u\Psi_x + v\Psi_y = 0 \quad (4.16b)$$

$$J_t + (uJ)_x + (vJ)_y = 0 \quad (4.16c)$$

(4.16) zusammen mit den beiden Euler-Gleichungen (4.2b), (4.2c) ist das ein System von fünf Gleichungen für  $\Omega$ ,  $\Psi$ ,  $u$ ,  $v$ , wobei noch die Cauchy-Riemannschen Gleichungen (4.10b) für  $\Omega$  und  $\Psi$  zu berücksichtigen sind. Im folgenden wird gezeigt, daß dieses überbestimmte System noch Lösungen hat.

(4.16a) und (4.16b) faßt man als zwei lineare, algebraische Gleichungen für  $u$  und  $v$  auf. Deren Lösung ergibt  $u$ ,  $v$  ausgedrückt durch  $\Omega$ ,  $\Psi$ :

$$u = \frac{1}{J} [\Omega_y \Psi_t - \Omega_t \Psi_y] \quad (4.17a)$$

$$v = \frac{1}{J} [\Omega_t \Psi_x - \Psi_t \Omega_x] \quad (4.17b)$$

Dies eingesetzt in (4.16c) zeigt, daß unter Berücksichtigung von (4.10b) (4.16c) identisch erfüllt ist, also keine weiteren Einschränkungen für  $\Omega$ ,  $\Psi$  liefert. Nun bleiben nur noch die beiden Euler-Gleichungen (4.2b), (4.2c) in die man (4.17a,b) einzusetzen hat. Da dies zu

unübersichtlichen Gleichungen für  $\Omega$  und  $\Psi$  führt, geht man besser zurück zu (4.10b) und schreibt die konforme Transformation explizit in komplexen Koordinaten:

$$\begin{aligned} z &\equiv x + iy \\ \bar{z} &\equiv x - iy \end{aligned} .$$

Als Lösung der Cauchy-Riemannschen Gleichungen (4.10b) hat man dann

$$\Omega = \alpha_1(z, t) + \alpha_2(\bar{z}, t) \quad (4.18a)$$

$$\Psi = i(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (4.18b).$$

$\alpha_1$  und  $\alpha_2$  müssen natürlich komplex konjugiert sein, wenn die konforme Transformation reell sein soll. Mit der expliziten Gestalt (4.18) von  $\Omega$  und  $\Psi$  vereinfachen sich die Ausdrücke für das Geschwindigkeitsfeld (4.17):

$$u = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha'_1} + \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha'_2} \right] \quad (4.19a)$$

$$v = \frac{i}{2} \left[ \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha'_1} - \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha'_2} \right] \quad (4.19b)$$

("Apostroph" bedeutet Ableitung nach  $z$  bzw. nach  $\bar{z}$  ; "Punkt" bedeutet hier dasselbe wie  $\partial_t$ ), wobei

$$J = 4 \alpha'_1 \alpha'_2 \quad (4.20)$$

benutzt wurde.

(4.19) in die Euler-Gleichungen eingesetzt, ergibt schließlich die Bestimmungsgleichungen für  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  :

$$\alpha''_1 \dot{\alpha}_1^2 - 2\dot{\alpha}_1 \alpha'_1 \dot{\alpha}'_1 + \ddot{\alpha}_1 \alpha'^2_1 = 0 \quad (4.21a)$$

$$\alpha''_2 \dot{\alpha}_2^2 - 2\dot{\alpha}_2 \alpha'_2 \dot{\alpha}'_2 + \ddot{\alpha}_2 \alpha'^2_2 = 0 \quad (4.21b)$$

Da  $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$  sein soll, ist die gesamte Lösung bestimmt, wenn man die Gleichung (4.21a) für  $\alpha_1(z, t)$  gelöst hat, da (4.21b) automatisch erfüllt ist, wenn  $\alpha_2$  und  $\alpha_1$  zueinander komplex konjugiert sind. Die Lösung von (4.21a) läßt sich mit einer Legendre-Transformation bewerkstelligen.

Dazu werden die abhängige und unabhängigen Variablen  $(\alpha_1, t, z)$  transformiert auf neue Variable

$$(\alpha_1, t, z) \longleftrightarrow (\omega, \tau, \xi)$$

mit der Definition

$$\begin{aligned}\tau &\equiv \dot{\alpha}_1 \\ \xi &\equiv \alpha'_1 \\ \omega &\equiv t\dot{\alpha}_1 + z\alpha'_1 - \alpha_1\end{aligned}\tag{4.22}$$

Die Umkehrung von (4.22) ist einfach

$$\begin{aligned}t &= \omega_\tau \\ z &= \omega_\xi \\ \alpha_1 &= \omega_\tau \tau + \omega_\xi \xi - \omega\end{aligned}\tag{4.23}$$

und die zweiten Ableitungen transformieren sich wie

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_1 &= \omega_{\xi\xi} K, \quad \alpha''_1 = \omega_{\tau\tau} K \\ \dot{\alpha}'_1 &= -\omega_{\tau\xi} K\end{aligned}\tag{4.24}$$

mit der Transformationsdeterminante

$$K \equiv [\omega_{\xi\xi}\omega_{\tau\tau} - \omega_{\tau\xi}^2]^{-1} = \ddot{\alpha}_1\alpha''_1 - \dot{\alpha}'_1{}^2\tag{4.25}$$

Die nichtlineare Gleichung (4.21a) wird dadurch zu einer linearen Gleichung für  $\omega(\tau, \xi)$ :

$$\tau^2 \omega_{\tau\tau} + 2\tau\xi \omega_{\tau\xi} + \xi^2 \omega_{\xi\xi} = 0\tag{4.26}$$

die sämtliche Lösungen von (4.21a) produziert, falls  $K \neq 0$  ist. Den Fall  $K = 0$  muß man gesondert diskutieren.

(4.26) läßt sich auch schreiben als:

$$\left(\tau\xi\partial_\tau + \xi^2\partial_\xi\right)\left(\frac{\tau}{\xi}\partial_\tau + \partial_\xi\right)\omega = 0\tag{4.27}$$

woraus man die allgemeine Lösung ablesen kann:

$$\omega = \tau A\left(\frac{\xi}{\tau}\right) + B\left(\frac{\xi}{\tau}\right)\tag{4.28}$$

$A, B$  sind zwei freie Funktionen von  $\frac{\xi}{\tau}$ .

Aus der Umkehrung der Legendre-Transformation (4.23) leitet man eine Parameterdarstellung der Lösung der ursprünglichen Gleichung (4.21a) ab:

$$t = \omega_\tau = A - \frac{\xi}{\tau}A' - \frac{\xi}{\tau^2}B'\tag{4.29a}$$

$$z = \omega_\xi = A' + \frac{1}{\tau}B'\tag{4.29b}$$

$$\alpha_1 = -B\tag{4.29c}$$

(4.29c) bedeutet aber, daß  $\alpha_1$  eine Funktion von  $\frac{\xi}{\tau}$  alleine ist. Kehrt man (4.29c) um, betrachtet  $\frac{\xi}{\tau}$  als Funktion von  $\alpha_1$  und ersetzt damit  $\frac{\xi}{\tau}$  in (4.29a,b), dann kann man zwischen (4.29a) und (4.29b) den einzigen verbleibenden Parameter  $\tau$  eliminieren und man bekommt einfach eine implizite, parameterfreie Darstellung für  $\alpha_1$ :

$$0 = z + F(\alpha_1)t + G(\alpha_1) \quad (4.30)$$

$F, G$  sind frei wählbar, stehen natürlich in eindeutiger Beziehung zu  $A, B$  in (4.29).

Nun bleibt nur noch die Klasse von Lösungen zu untersuchen, für die die Legendre-Transformation versagt, das heißt für die  $K = 0$  (4.25):

$$\ddot{\alpha}_1 \alpha_1'' - \dot{\alpha}_1' = 0 \quad (4.31)$$

Dies impliziert die Existenz einer Funktion  $D$

$$\dot{\alpha}_1 = D(\alpha_1').$$

Soll  $\alpha_1$  noch der Differentialgleichung (4.21a) genügen, so bleibt als einzige Möglichkeit, für die  $K = 0$  ist:

$$\dot{\alpha}_1 \propto \alpha_1' \quad (4.32)$$

Für diese Lösungsklasse existiert zwar die Legendre-Transformation nicht, dennoch enthält die implizite Darstellung (4.30) diese Lösungen ( $F = \text{const.}$ ), da man die aus der Legendre-Transformation resultierenden Parameter gänzlich eliminieren konnte.

Zusammenfassend sollen nochmals die *Bestimmungstücke der vollständigen Lösung* aufgeschrieben werden:

$$\rho = 8\gamma \alpha_1' \alpha_2' \frac{h_x^2 + h_y^2}{\cosh^2(h)} \quad (4.33a)$$

$$h_{xx} + h_{yy} = 0$$

$$u = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1'} + \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha_2'} \right] = -\Re e \left( \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1'} \right) \quad (4.33b)$$

$$v = \frac{i}{2} \left[ \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1'} - \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha_2'} \right] = -\Im m \left( \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1'} \right) \quad (4.33c)$$

$$\Phi = \text{const.} - \gamma \ln \rho \quad (4.33d)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \hat{y} &= i(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (4.33e)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(x - iy, t) &= \bar{\alpha}_1(x + iy, t) \\ 0 &= x + iy + F(\alpha_1)t + G(\alpha_1) \end{aligned} \quad (4.33f)$$

Insgesamt hat man noch drei Funktionen zur freien Wahl:  $F(\alpha_1)$ ,  $G(\alpha_1)$  und  $h(\hat{x}, \hat{y})$  als Lösung einer Laplace-Gleichung. Ist  $F$  und  $G$  festgelegt, so ist  $\alpha_1(z, t)$  bestimmt durch (4.33f),  $\alpha_2$  ist das konjugiert komplexe dazu. Damit ist auch  $\hat{x}, \hat{y}$  bestimmt über (4.33e) und das Geschwindigkeitsfeld  $u, v$  durch (4.33b,c). Eine Wahl von  $h(\hat{x}, \hat{y})$  fixiert dann  $\rho(x, y, t)$  durch (4.33a). Dichte und Geschwindigkeitsfeld sind gekoppelt über  $\alpha_1(z, t)$ .

## 4.2. Ein Beispiel

Zur Illustration, welche Eigenschaften die durch (4.33) gegebene Lösungsklasse haben kann, soll ein Beispiel für die Wahl von  $F$ ,  $G$ ,  $h$  diskutiert werden, das ein bemerkenswertes Kollapsverhalten zeigt.

Sei

$$F = -2c \alpha_1, \quad G = -2 \alpha_1 \quad (4.34)$$

$$c = \text{const.}$$

dann folgt aus (4.33f)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \frac{x + iy}{ct + 1} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \frac{x - iy}{ct + 1} \end{aligned} \quad (4.35).$$

Die konforme Transformation (4.33e) ist dann

$$\hat{x} = \frac{x}{ct + 1}, \quad \hat{y} = \frac{y}{ct + 1} \quad (4.36)$$

und das Geschwindigkeitsfeld (4.33b,c)

$$u = \frac{cx}{ct + 1} \quad (4.37a)$$

$$v = \frac{cy}{ct + 1} \quad (4.37b).$$

Die Jacobideterminante (4.12) der konformen Transformation ist

$$4 \alpha'_1 \alpha'_2 = \frac{1}{(ct + 1)^2} \quad (4.38).$$

Die Lösung der Laplace-Gleichung für  $h(\hat{x}, \hat{y})$  soll dargestellt werden durch

$$h = a \cosh(q_{\hat{x}}) \sin(q_{\hat{y}}), \quad a = \text{const.} \quad (4.39)$$

$$\text{mit } q_{\hat{x}\hat{x}} + q_{\hat{y}\hat{y}} = 0$$

wobei  $q(\hat{x}, \hat{y})$  zunächst noch unbestimmt bleibt. Die Darstellung einer Lösung der Laplace-Gleichung in der Form (4.39) entsteht aus einer konformen Transformation – bestimmt

durch  $q$ — einer Fourierkomponente von  $h(\hat{x}, \hat{y})$ .  $q(\hat{x}, \hat{y})$  erfüllt wiederum eine Laplace-Gleichung, weil diese invariant ist unter der Gruppe der konformen Transformationen in zwei Dimensionen.

Damit ergibt sich für die Dichte  $\rho$

$$\rho = \frac{2\gamma a^2}{(ct+1)^2} (q_{\hat{x}\hat{x}}^2 + q_{\hat{y}\hat{y}}^2) \left[ \sinh^2(q_{\hat{x}}) + \cos^2(q_{\hat{y}}) \right] \operatorname{sech}^2(a \cosh(q_{\hat{x}}) \sin(q_{\hat{y}})) \quad (4.40)$$

Die Wahl von  $q$  ist bestimmt durch die Dichteverteilung bei  $t = 0$ . Sie sollte so getroffen werden, daß  $\rho$  in der ganzen  $(x, y)$ -Ebene endlich ist. Insbesondere sollte  $\rho \rightarrow 0$  für  $x, y \rightarrow \pm\infty$  gelten. Diese Forderungen sind erfüllt für die einfachste, rotationsinvariante Lösung der Laplace-Gleichung

$$q = \frac{1}{2} b \ln(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \quad b = \text{const.} \quad (4.41)$$

womit die Dichte (4.40) in  $(x, y, t)$ -Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned} \rho = 2\gamma(ab)^2 \frac{(ct+1)^2}{(x^2+y^2)^2} & \left[ \sinh^2\left(\frac{bx(ct+1)}{x^2+y^2}\right) + \cos^2\left(\frac{by(ct+1)}{x^2+y^2}\right) \right] \times \\ & \times \operatorname{sech}^2\left[a \cosh\left(\frac{bx(ct+1)}{x^2+y^2}\right) \sin\left(\frac{by(ct+1)}{x^2+y^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.42).$$

Eine grafische Darstellung der Höhenlinien der Dichte (4.42) findet man in Abbildung 6. Für beliebiges  $t > 0$  geht das Argument des  $\operatorname{sech}$  gegen Null für  $x, y \rightarrow \pm\infty$ , der  $\cos^2$  geht gegen Eins, der  $\sinh^2$  gegen Null und der Vorfaktor  $(x^2 + y^2)^{-2}$  ebenso gegen Null. Das heißt, die Dichte verschwindet im ganzen asymptotischen Bereich  $x, y \rightarrow \pm\infty$ . Das Verhalten im Ursprung  $x = 0, y = 0$  untersucht man am besten in Polarkoordinaten mit  $r^2 \equiv x^2 + y^2$ . Für beliebige Zeiten und mit Unterdrückung der Winkelabhängigkeit verhält sich  $\rho$  wie

$$\begin{aligned} \rho & \propto \frac{1}{r^4} \left[ \sinh^2\left(\frac{b}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{b}{r}\right) \right] \operatorname{sech}^2\left[a \cosh\left(\frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{b}{r}\right)\right] \\ & \longrightarrow \frac{1}{r^4} e^{\frac{2b}{r}} \exp\left(-2a e^{\frac{b}{r}}\right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Der  $r^{-4}$ -Anteil und der  $\sinh$ -Anteil divergieren zwar für  $r \rightarrow 0$ , doch dies wird kompensiert durch das  $\exp(-e^{\frac{1}{r}})$  Verhalten des  $\operatorname{sech}$ -Anteils, so daß  $\rho \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$  gilt. Der  $\sin$ -Term im Argument des  $\operatorname{sech}$  bewirkt rapide Oszillationen der Dichte bei  $r \rightarrow 0$ .

Ist das Argument des  $\sin$  in (4.42) nicht Null, so ist das Verhalten von  $\rho$  bei  $t \rightarrow \infty$  für festes  $x, y$

$$\rho \longrightarrow t^2 e^{2t} \exp(-2a e^t) \quad (4.44)$$

wobei die  $x, y$ -abhängigen Koeffizienten unterdrückt wurden. Gemäß (4.44) geht die Dichte für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null, überall dort, wo das Argument des  $\sin$  nicht verschwindet.

Ein völlig anderes zeitliches Verhalten hat die Dichte aber bei den Punkten, wo das Argument des  $\sin$  verschwindet. In diesem Fall, (4.42) ist das einfach die Kurve  $y = 0$ , auf der  $\rho$  lautet:

$$\rho(x, y = 0, t) = 2\gamma (ab)^2 \frac{(ct + 1)^2}{x^4} \cosh^2\left(\frac{b}{x}(ct + 1)\right) \quad (4.45).$$

Für  $x \rightarrow \infty$  fällt  $\rho$  ab, divergiert aber offensichtlich für  $t \rightarrow \infty$  wie

$$\rho|_{y=0} \longrightarrow t^2 e^{\frac{2bct}{x}} \quad (4.46).$$

(4.42) beschreibt somit eine Dichteverteilung, die im räumlich Unendlichen verschwindet, für  $t \rightarrow \infty$  überall in der  $(x, y)$ -Ebene gegen Null geht, außer auf der Hyperfläche  $y = 0$ , wo  $\rho$  exponentiell anwächst. Da die hier diskutierten Lösungen noch translationsinvariant sind in  $z$ -Richtung, kollabiert die Materie in drei Dimensionen auf die Ebene  $y = 0$ . Das Geschwindigkeitsfeld ist für dieses spezielle Beispiel stets linear in  $x, y$  und geht gegen Null für  $t \rightarrow \infty$ .

Ein qualitativ ähnliches Kollapsverhalten der Materie bekommt man, wenn man  $q$  nicht wie in (4.41) wählt, sondern eine kompliziertere Lösung der Laplace-Gleichung, die man zum Beispiel durch beliebig häufiges Differenzieren von  $q$  (4.41) nach  $x$  oder  $y$  erhält. In diesem Fall nimmt die Dichte ebenso ab für  $t \rightarrow \infty$  und wächst exponentiell auf Kurven in der  $(x, y)$ -Ebene, die eine kompliziertere Gestalt haben als  $y = 0$ . Das dreidimensionale Bild ist aber stets eine Verdichtung auf Flächen, die durch Deformationen einer Ebene entstehen, da  $\rho$  unabhängig ist von der dritten räumlichen Koordinate.

Es handelt sich bei diesem Modell somit um eine Art von "pancake"-Kollaps, aus dem flächenhafte Materiekonzentrationen entstehen. Das bemerkenswerte ist, daß auch bei Berücksichtigung des Gasdrucks solche Strukturen entstehen können, die zunächst nur für druckfreie Materie vorhergesagt wurden. Daß dieses spezielle Beispiel Elemente der gesamten Lösungsklasse (4.33) widerspiegelt, wird in Abschnitt 4.3. gezeigt.

### 4.3. Eigenschaften des Modells

Die Diskussion der allgemeinen Eigenschaften der Lösung (4.33) in diesem Abschnitt dreht sich um das asymptotische Verhalten von  $\rho$  für  $x, y \rightarrow \infty$ , die Asymptotik für  $t \rightarrow \infty$ , die Existenz lokaler Extrema von  $\rho$  und das Verhalten der kinematischen Variablen Expansion und Rotation.

Für eine physikalisch sinnvolle Lösung ist entscheidend, daß die Dichte im räumlich Unendlichen verschwindet (beschreibt eine lokale Verdichtung im Universum, für die die Hintergrundexpansion vernachlässigbar ist) oder zumindest gegen eine bloße zeitabhängige Funktion konvergiert (Dichteinhomogenitäten auf einem expandierenden Hintergrund). Um nun abzuschätzen, für welche Klasse von Anfangsbedingungen für die Lösung (4.33) die Dichte ein solches Verhalten zeigt, geht man zurück zur Darstellung in reellen  $(x, y)$ -Koordinaten, da für Untersuchungen der Asymptotik die komplexen  $(z, \bar{z})$ -Koordinaten ungeeignet sind.

Sämtliche Funktionen, die eine Laplace-Gleichung erfüllen, werden in eine Fourierreihe entwickelt, die aus einer Überlagerung separierter Lösungen der Laplace-Gleichung besteht. Damit kann man jede Lösung der Cauchy-Riemann Gleichungen (4.10b) schreiben als

$$\begin{aligned} \hat{x} = \Omega = & s_1 x + s_2 y + s_3 xy + s_4 (x^2 - y^2) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cosh(k_i x) \sin(k_i y) + b_i \cosh(l_i x) \cos(l_i y) + \\ & + c_i \sinh(m_i x) \sin(m_i y) + d_i \sinh(n_i x) \cos(n_i y) + \\ & + \hat{a}_i \cosh(\hat{k}_i y) \sin(\hat{k}_i y) + \hat{b}_i \cosh(\hat{l}_i y) \cos(\hat{l}_i x) + \\ & + \hat{c}_i \sinh(\hat{m}_i y) \sin(\hat{m}_i x) + \hat{d}_i \sinh(\hat{n}_i y) \cos(\hat{n}_i x) \end{aligned} \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \hat{y} = \Psi = & s_1 y - s_2 x + 2s_4 xy - \frac{1}{2}s_3 (x^2 - y^2) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} -a_i \sinh(k_i x) \cos(k_i y) + b_i \sinh(l_i x) \sin(l_i y) - \\ & - c_i \cosh(m_i x) \cos(m_i y) + d_i \cosh(n_i x) \sin(n_i y) + \\ & - \hat{a}_i \sinh(\hat{k}_i y) \cos(\hat{k}_i x) + \hat{b}_i \sinh(\hat{l}_i y) \sin(\hat{l}_i x) + \\ & - \hat{c}_i \cosh(\hat{m}_i y) \cos(\hat{m}_i x) + \hat{d}_i \cosh(\hat{n}_i y) \sin(\hat{n}_i x) \end{aligned} \quad (4.47b)$$

Die gesamten Koeffizienten

$$coeff \equiv \{a_i, b_i, c_i, d_i, k_i, l_i, m_i, n_i, \hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i, \hat{d}_i, \hat{k}_i, \hat{l}_i, \hat{m}_i, \hat{n}_i, s_1, s_2, s_3, s_4 | i = 1 \dots N\}$$

können natürlich noch zeitabhängig sein. Sie sind im Prinzip bestimmt durch die Gleichung (4.21), die die Zeitabhängigkeit der konformen Transformation bestimmt, wobei die komplexe Darstellung mit der reellen zusammenhängt über

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\Omega + i\Psi), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\Omega - i\Psi)$$

Eine entsprechende Fourierzerlegung kann man für  $h(\hat{x}, \hat{y})$  machen

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cosh(\kappa_i \hat{x}) \sin(\kappa_i \hat{y}) + B_i \cosh(\omega_i \hat{x}) \cos(\omega_i \hat{y}) + \dots \quad (4.48)$$

$$A_i, B_i, \dots, \kappa_i, \omega_i, \dots = \text{const}$$

Diese Ausdrücke (4.47), (4.48) eingesetzt in  $\rho$  (4.33a)

$$\rho = 2\gamma [\Omega_x^2 + \Omega_y^2] \frac{(h_x^2 + h_y^2)}{\cosh^2(h)} \quad (4.49)$$

ergeben eine Dichteverteilung, die fast überall gegen Null geht für  $x, y \rightarrow \pm\infty$ , außer auf den Hyperflächen  $h = 0$ , wo  $\rho$  im Unendlichen divergiert. Die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten *coeff* spielt hierbei noch keine Rolle, sie kann gesondert diskutiert werden. Bei  $x, y \rightarrow \pm\infty$  divergiert offensichtlich  $\Omega$  und  $\Psi$ , damit auch  $h$  als Funktion von  $x, y$  aufgefaßt. Nur für  $h \neq 0$  kann das Divergieren der Terme in  $\rho$  vor dem  $\cosh^{-2}$ -Term kompensiert werden durch den stärkeren Abfall dieses sech Terms, der im wesentlichen wie  $e^{-2h}$  abfällt.

Um dieses ungewünschte Verhalten von  $\rho$ , das vom divergierenden Verhalten der Lösungen der Laplace-Gleichung herrührt, zu beseitigen, spiegelt man einfach die Fourierreihen für  $\Omega$  und  $\Psi$  (4.47) am Einheitskreis, das heißt, man ersetzt in (4.47)  $x, y$  durch

$$x \longrightarrow \bar{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4.50a)$$

$$y \longrightarrow \bar{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4.50b)$$

Das reguläre Verhalten der Lösung der Laplace-Gleichung am Ursprung  $x = 0, y = 0$  wird dadurch in das räumlich Unendliche gespiegelt, allerdings wird die gespiegelte Lösung divergent am Ursprung, was aber wegen des rapiden Abfalls des sech Terms in der Dichte zu keinem pathologischen Verhalten von  $\rho$  führt. Die Relationen zwischen  $\Omega$  und  $\Psi$  (4.10b) bleiben unter (4.50) erhalten, da (4.50) wiederum nichts anderes als eine konforme Transformation ist. Die gespiegelten Ausdrücke für  $\Omega$  und  $\Psi$  bleiben bei  $x, y \rightarrow \pm\infty$  endlich, damit auch die Ableitungen  $\Omega_x$  und  $\Omega_y$ . Daraus folgt, daß auch  $h$  endlich ist im Unendlichen, die Dichte fällt aber dennoch ab, da durch die Spiegelung (4.50)  $\rho$  (4.49) einen Vorfaktor  $(x^2 + y^2)^{-2}$  bekommt

$$(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) \longrightarrow \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [\Omega_{\bar{x}}^2 + \Omega_{\bar{y}}^2] \quad (4.51)$$

Für die Orte, wo  $h = 0$  ist, konvergiert die Dichte ebenso gegen Null, da  $\Omega_{\bar{x}}$ ,  $\Omega_{\bar{y}}$  und  $h_{\bar{x}}$ ,  $h_{\bar{y}}$  beschränkt bleiben im Unendlichen.

Über das asymptotische Verhalten für  $t \rightarrow \infty$  lassen sich ebensolche allgemeinen Aussagen machen, wie über die räumliche Asymptotik, wenn man die gespiegelten Ausdrücke (4.47)  $\Omega(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$  in die Entwicklungsgleichung für  $\alpha_1$  (4.21a) einsetzt, unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Fourierkoeffizienten *coff*. An (4.47) und (4.48) kann man ablesen, daß das am Beispiel in Abschnitt 4.2. demonstrierte Verhalten — Kollaps auf bestimmten Hyperflächen — immer dann auftritt, wenn mindestens ein Koeffizient aus *coff* in der Zeit anwächst: Angenommen es gibt eine solche Funktion aus der Menge *coff*, dann ist aus (4.47), (4.48) ersichtlich, daß für  $t \rightarrow \infty$  zwar  $\Omega \rightarrow \infty$  gilt und damit auch  $h$  im zeitlich Unendlichen divergiert, jedoch wegen des sech-Terms gilt  $\rho \rightarrow 0$  an allen Stellen, wo  $h \neq 0$  ist.

An den Stellen  $h = 0$  ist der sech-Term in (4.49) gleich eins und wenn für  $t \rightarrow \infty$   $\Omega$  und  $h$  und damit auch deren Ableitungen divergieren, dann geht auch  $\rho$  gegen Unendlich. Das bedeutet, gibt es mindestens eine Funktion aus *coff*, die für  $t \rightarrow \infty$  unbeschränkt wächst, so divergiert die Dichte  $\rho$  genau auf den Hyperflächen  $h = 0$ , also auf den Knotenlinien einer zweidimensionalen Laplace-Gleichung. Ein anschauliches Bild für solch ein Nullstellengebilde bieten die Klangfiguren einer schwingenden Membran, deren Knotenlinien durch die Nullstellen einer Lösung der Laplace-Gleichung bestimmt sind. Im dreidimensionalen Raum sind die Hyperflächen, auf denen die Dichte anwächst, Flächen, die man sich durch stetige Deformationen einer Ebene entstanden denken kann, da die Dichte in der dritten Dimension nicht variiert.

Es bleibt nur noch die Frage zu beantworten, ob es wirklich ein Element aus *coff* gibt, das in der Zeit anwächst. Das Beispiel in Abschnitt 4.2. entstand durch eine Wahl von  $\Omega$  und  $\Psi$ , bei der nur jeweils der erste, in  $x$ ,  $y$  lineare Term in der Fourierreihe berücksichtigt wurde. In diesem Fall war ein Kollaps auf einer einzelnen Hyperfläche möglich. Setzt man nun für  $\Omega$ ,  $\Psi$  eine Fourierzerlegung in  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  wie in (4.47) an, berechnet damit  $\alpha_1(z, t)$  und setzt diese unendliche Summe in die Entwicklungsgleichung für  $\alpha_1$  (4.21a) ein, dann resultieren unendlich viele gewöhnliche Differentialgleichungen für die Fourierkoeffizienten *coff*, die man aber in diesem Fall einfach lösen kann, obwohl (4.21a) nichtlinear ist. Der Satz von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Fourierkoeffizienten ist äquivalent zu einer einzigen partiellen Differentialgleichung für  $\alpha_1$  (4.21a). Die entsprechende Fourierentwicklung von  $\alpha_1(z, t)$  ist

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sinh\left(\frac{k_i}{z}\right) + b_i \cosh\left(\frac{l_i}{z}\right) + c_i \sin\left(\frac{m_i}{z}\right) + d_i \cos\left(\frac{n_i}{z}\right) \quad (4.52)$$

(4.52) eingesetzt in (4.21a) ergibt zwar Produkte von unendlichen Summen, jedoch verschwinden alle Koeffizienten der daraus entstehenden Produkte der  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  Funktionen genau dann wenn gilt:

$$\bar{k}_i = \bar{l}_i = \bar{m}_i = \bar{n}_i = 0 \quad (4.53a)$$

$$k_i \propto l_i \propto m_i \propto n_i \quad (4.53b)$$

$$\dot{a}_i = \dot{b}_i = \dot{c}_i = \dot{d}_i = 0 \quad (4.53c)$$

Die  $\{k_i, l_i, m_i, n_i | i = 1, \dots, \infty\}$  sind sämtlich lineare Funktionen in  $t$ .  $\Omega$  und dessen Ableitungen und damit auch  $h(\hat{x}, \hat{y})$  können in der Zeit unbeschränkt anwachsen. Das bedeutet, für eine beliebige Wahl von  $h$  wächst die Dichte auf den Knotenlinien von  $h$  in der Zeit an und geht gegen Null überall sonst. Das am Beispiel in Abschnitt 4.2. demonstrierte Verhalten ist also eine allgemeine Eigenschaft der Lösung (4.33).

Für das Verständnis der zulässigen Dichteverteilungen in (4.33) ist die Kenntnis *lokaler Extrema* wichtig. Hier ist es wieder zweckmäßig, für  $\hat{x} = \Omega$  und  $\hat{y} = \Psi$  die Darstellung (4.33e) zu benutzen und für  $h(\hat{x}, \hat{y})$

$$h(\hat{x}, \hat{y}) = \beta_1(\hat{x} + i\hat{y}) + \beta_2(\hat{x} - i\hat{y}) \quad (4.54)$$

mit beliebigem  $\beta_1, \beta_2$ . Die lokalen Extrema sind dann bestimmt durch:

$$\begin{aligned} \nabla \rho &= 0 \iff \\ \frac{\alpha_1''}{\alpha_1'} + \frac{\beta_1''}{\beta_1'} \alpha_1' - 2 \tanh(\beta_1 + \beta_2) \beta_1' \alpha_1' &= 0 \\ \frac{\alpha_2''}{\alpha_2'} + \frac{\beta_2''}{\beta_2'} \alpha_2' - 2 \tanh(\beta_1 + \beta_2) \beta_2' \alpha_2' &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der jeweilige Charakter der Extrema ist bestimmt durch das Vorzeichen der Eigenwerte der Hesse-Matrix

$$\left( \rho_{x_i x_k} \right), \quad i, k = 1, 2$$

welche lauten

$$\lambda_{1|2} = \frac{1}{2} \left[ (\rho_{xx} + \rho_{yy}) \pm \sqrt{(\rho_{xx} - \rho_{yy})^2 + 4\rho_{xy}^2} \right] |_{\nabla\rho=0} \quad (4.56)$$

Mit (4.33) ergibt sich für die Summe der beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \rho_{xx} + \rho_{yy} |_{\nabla\rho=0} = -\rho^2 |_{\nabla\rho=0} < 0 \quad (4.57)$$

Damit muß einer der beiden Eigenwerte stets negativ sein, das heißt, es kann *kein lokales Minimum* existieren, für dessen Existenz  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  die Voraussetzung wäre. Ob nun ein Sattelpunkt ( $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ) vorliegt, oder ein lokales Maximum ( $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ) wird durch das Vorzeichen der Determinante der Hesse-Matrix bestimmt:

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}^2 > 0 \quad (4.58a)$$

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}^2 < 0 \quad (4.58b).$$

Für die Lösung (4.33) lautet sie explizit

$$\rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}^2 |_{\nabla\rho=0} = \left[ \frac{32\rho^2}{\cosh^2(\beta_1 + \beta_2)} \left( \beta_2'^2 \alpha_2'^2 H + \beta_1'^2 \alpha_1'^2 \bar{H} \right) - 4H\bar{H} \right] |_{\nabla\rho=0} \quad (4.59a)$$

mit

$$H \equiv \frac{a_1'''}{a_1'} - \frac{a_1''^2}{a_1'^2} + \frac{b_1'''}{b_1'} \alpha_1'^2 - 2 \frac{b_1'''^2}{b_1'} \alpha_1'^2 - 2 \tanh(\beta_1 + \beta_2) \beta_1' \alpha_1'' \quad (4.59b)$$

Daraus läßt sich keine Aussage über das Vorzeichen gewinnen, die unabhängig wäre von der Wahl der Anfangsbedingungen.

Interessant ist noch ein einfacher Ausdruck für die zeitliche Ableitung von  $\rho$  bei den Extrema

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} |_{\nabla\rho=0} = 2\Re e(F' \alpha_1') \quad (4.60)$$

wobei  $F$  die freie Funktion der Lösung (4.33) ist.  $F$  an den Stellen  $\nabla\rho = 0$  bestimmt gemäß (4.60) eine Zeitskala der Entwicklung der Dichte auf den Extrema. Allerdings läßt sich keine eindeutige Beziehung zwischen dem Vorzeichen von  $F$  und dem Charakter des Extremums herstellen.

Aussagen über das Geschwindigkeitsfeld und die Entwicklung von Flüssigkeitselementen gewinnt man durch Untersuchung der kinematischen Variablen in ähnlicher Weise wie in Abschnitt 2. an der Staub-Lösung demonstriert. Schon aus (4.33b,c) sieht man, daß die

beiden Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes  $u, v$  Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind und somit harmonische Funktionen in  $x, y$  sein müssen. Die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten in symmetrischen Anteil  $\theta_{ij}$  und antisymmetrischen Anteil  $\omega_{ij}$  ergibt explizit

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \theta_{ij} + \omega_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

$$\theta_{11} = \theta_{22} = u_x, \quad \theta_{12} = \theta_{21} = 0 \quad (4.61a)$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = u_y \quad (4.61b).$$

Für die Ableitungen gilt außerdem

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

(4.33) eingesetzt ergibt dann

$$u_x = -\Re(F' \alpha'_1)$$

$$u_y = \Im(F' \alpha'_1) \quad (4.62)$$

Der Expansionstensor ist diagonal, das heißt es existiert keine Scherung in der Bewegung der Flüssigkeitselemente und die Expansion  $\text{Trace}(\theta_{ij})$  ist genau gleich der logarithmischen Zeitableitung von  $\rho$  an der Stelle der Extrema (siehe (4.60)).

## 5. Dreidimensionale Gleichgewichtskonfigurationen

In den vorhergehenden Abschnitten wurden zeitabhängige Lösungen des Systems (1.8) diskutiert, die als Modelle für den Gravitationskollaps interpretierbar sind. In Abschnitt 3 stellte sich heraus, daß das hydrostatische Gleichgewicht als eine Ein-Soliton Lösung eine ausgezeichnete Rolle spielt. Das zweidimensionale Modell in Abschnitt 4 wurde aus dem hydrostatischen Gleichgewicht durch zeitabhängige Transformationen konstruiert. Das nächstliegende wäre nun, die in Abschnitt 4 angewandte Methode direkt auf drei Dimensionen zu verallgemeinern um zu einem dreidimensionalen Modell des Gravitationskollaps mit Gasdruck zu kommen. Das erste Problem einer derartigen Verallgemeinerung ist die Unkenntnis der allgemeinen Gleichgewichtslösung in 3-D. Das hydrostatische Gleichgewicht eines isothermen Gases ist wiederum bestimmt durch

$$\Delta\Phi = c e^{-\frac{1}{\gamma}\Phi} \quad (5.1a)$$

$$\rho = c e^{-\frac{1}{\gamma}\Phi} \quad (5.1b)$$

wobei in diesem Abschnitt  $\Delta$  der dreidimensionale Laplace-Operator ist. Die Prozedur zur Lösung der Liouville-Gleichung (4.5a), die das hydrostatische Gleichgewicht in zwei Dimensionen bestimmt, kann nicht verallgemeinert werden auf drei Dimensionen, da (5.1a) nicht mehr invariant ist unter der unendlich-dimensionalen Symmetriegruppe der konformen Transformationen in zwei Dimensionen. Diese Invarianz ermöglicht die Konstruktion der allgemeinen Lösung der Liouville-Gleichung durch Anwendung der Symmetrietransformationen auf eine spezielle Lösung — zum Beispiel die singuläre Lösung. (5.1a) ist nun nicht einmal mehr invariant unter der Gruppe der konformen Transformationen in drei Dimensionen, die im Gegensatz zu 2-D endlich dimensional ist (10-dimensional, siehe Olver 1986). Selbst für sphärische Symmetrie ist die aus (5.1a) entstehende gewöhnliche Differentialgleichung nicht geschlossen lösbar (siehe Chandrasekhar 1957). Nur die singuläre Lösung

$$\rho_S = \frac{2\gamma}{r^2} \quad (5.2)$$

ist bekannt. Selbst wenn man eine nichttriviale Lösung von (5.1) hätte, ist immer noch nicht klar, ob eine der in Abschnitt 4 erläuterten analoge Prozedur in drei Dimensionen existiert.

In diesem Abschnitt wird eine spezielle Klasse von Lösungen der Gleichungen (5.1) angegeben, die auf keinen Symmetrieannahmen beruht. Es stellt sich heraus, daß es

unmöglich ist, durch entsprechende zeitabhängige Transformationen aus dieser Gleichgewichtslösung eine zeitabhängige Lösung von (8) zu konstruieren. Als Resultat dieser Transformationsprozeduren bekommt man jedoch zumindest eine neue stationäre Lösung, das heißt, eine Bewegung, bei der alle Größen zwar zeitunabhängig sind, das Geschwindigkeitsfeld jedoch nicht verschwindet.

Zur Beschreibung eines Gravitationskollaps ist ein Gleichgewichtsmodell natürlich ungeeignet. Bedeutsam sind Gleichgewichtskonfigurationen als die Endzustände des Gravitationskollaps nach Virialisierung der Materiebewegung. Interessant ist das Verhalten des Gleichgewichts gegenüber kleinen Störungen, die Aufschluß geben können über die Fragmentierung einer Gaswolke. Insbesondere die dabei auftretenden typischen Längenskalen und die Massen der Fragmente sind von Bedeutung für die Evolution von Dichteinhomogenitäten. Für die hier angegebene Lösung ist das besonders interessant, da sie keine manifeste Symmetrie hat. Im sphärisch-symmetrischen Fall kann natürlich immer nur eine einzige, zentrale Verdichtung entstehen. In einer späten Phase der Entwicklung von Dichteinhomogenitäten aus der sich Galaxien bilden, können die folgenden Modelle auch noch relevant sein, wenn man sich eine Gaswolke auf kleinen Skalen vorstellt, die sich schon so weit verdichtet hat, daß sie in einem Gleichgewicht relaxiert ist, ohne irgendwelche Singularitäten entwickelt zu haben. Auf jeden Fall relevant sind diese Modelle für die Theorie der Sternentstehung aus diffusen Gaswolken durch Fragmentation oder für die Beschreibung interstellarer Gaswolken.

### 5.1. Ein Gleichgewichtsmodell ohne Symmetrie

Ausgangspunkt der Konstruktion einer Lösung von (5.1) ist ein Ansatz für die Dichte

$$\rho = \frac{1}{r^2} \tilde{R}(\theta, \phi) \quad (5.3)$$

wobei  $(r, \theta, \phi)$  sphärische Polarkoordinaten bezeichnen.  $\rho$  ist also ein Produkt aus der singulären Lösung (5.2) und einer noch zu bestimmenden Funktion  $\tilde{R}$  der Winkelkoordinaten. Die Gesamtmasse innerhalb einer Kugel mit Radius  $\hat{r}$

$$\propto r^3 \rho|_{r=\hat{r}} \propto \hat{r}$$

einer solchen Konfiguration divergiert natürlich mit wachsendem  $\hat{r}$ , was aber typisch für eine isotherme Gaswolke ist.

$\tilde{R}(\theta, \phi)$  muß bestimmt werden durch Einsetzen von (5.3) in (5.1). In diesem Fall ist es umständlich weiter mit Polarkoordinaten zu arbeiten und es sollen statt dessen neue Koordinaten eingeführt werden

$$(x, y, z) \longleftrightarrow (x, \alpha \equiv \frac{y}{x}, \beta \equiv \frac{z}{x}) \quad (5.4a)$$

die mit den Polarkoordinaten wie folgt zusammenhängen

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 (1 + \alpha^2 + \beta^2) \\ \alpha &= \tan(\phi) \\ \beta &= \frac{1}{\cos \phi} \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned} \quad (5.4b).$$

Der Ansatz (5.3) kann dann geschrieben werden als

$$\rho = \frac{1}{x^2} R(\alpha, \beta) \quad (5.5)$$

und für das Gravitationspotential gilt

$$\Phi = \gamma \ln c + 2\gamma \ln x - \gamma \ln R(\alpha, \beta) \quad (5.6)$$

(5.6) eingesetzt in (5.1) ergibt

$$\begin{aligned} L[\ln R] &\equiv \\ &\equiv 2 + \left( (1 + \alpha^2) \partial_{\alpha\alpha} + 2\alpha\beta \partial_{\alpha\beta} + (1 + \beta^2) \partial_{\beta\beta} + 2\alpha \partial_{\alpha} + 2\beta \partial_{\beta} \right) \ln(R) = -\frac{1}{\gamma} R \end{aligned} \quad (5.7)$$

Das bedeutet, es gibt in der Tat Lösungen des Typs (5.5), da die Koeffizienten in (5.7)  $x$ -unabhängig sind und  $R$  nur eine Funktion von  $\alpha, \beta$  ist.

Man kann sich nun davon überzeugen, daß der Differentialoperator  $L[f]$ , definiert durch die linke Seite von (5.7) folgenden Ausdruck zu Null macht

$$L\left[\ln \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 + \alpha^2)^2}\right] = 0 \quad (5.8).$$

Nun führt man statt  $R(\alpha, \beta)$  eine neue Variable  $\psi(\alpha, \beta)$  ein, die definiert ist durch

$$R \equiv \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 + \alpha^2)^2} e^{-\frac{1}{\gamma} \psi} \quad (5.9)$$

und erhält dadurch aus (5.7) unter Benutzung von (5.8)

$$(1 + \alpha^2) \psi_{\alpha\alpha} + 2\alpha\beta \psi_{\alpha\beta} + (1 + \beta^2) \psi_{\beta\beta} + 2\alpha \psi_{\alpha} + 2\beta \psi_{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 + \alpha^2)^2} e^{-\frac{1}{\gamma} \psi} \quad (5.10)$$

Kennt man die Lösung von (5.10), kann man über (5.9) und (5.5)  $\rho$  rekonstruieren.

(5.10) wird beträchtlich vereinfacht, wenn man neue unabhängige Variablen  $\lambda, \mu$  einführt, die (5.10) auf die Normalform einer elliptischen Gleichung bringen. Sei

$$\lambda \equiv \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha^2} \quad (5.11a)$$

$$\mu \equiv \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{1 + \alpha^2} \quad (5.11b)$$

dann wird aus (5.10):

$$\psi_{\lambda\lambda} + \psi_{\mu\mu} = e^{-\frac{1}{\gamma} \psi} \quad (5.12)$$

was wiederum eine gewöhnliche Liouville-Gleichung ist (siehe Abschnitt 4.1.). Deren Lösungsmannigfaltigkeit läßt sich gewinnen aus den Lösungen einer zweidimensionalen Laplace-Gleichung in  $(\lambda, \mu)$ -Koordinaten für eine Funktion  $g(\lambda, \mu)$  :

$$e^{-\frac{1}{\gamma} \psi} = 2\gamma \frac{(g_{\lambda}^2 + g_{\mu}^2)}{\cosh^2(g)} \quad (5.13)$$

$$\text{mit } g_{\lambda\lambda} + g_{\mu\mu} = 0$$

Damit hat man für die Dichte

$$\rho = \frac{2\gamma}{x^2} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{(g_\lambda^2 + g_\mu^2)}{\cosh^2(g)} \quad (5.14)$$

$\rho$  ist vollständig bestimmt durch die Lösung einer zweidimensionalen Laplace-Gleichung  $g(\lambda, \mu)$ .

Da die sphärischen Polarkoordinaten eine anschaulichere Bedeutung haben als die  $(\lambda, \mu)$ -Koordinaten, sei die Lösung (5.14) noch in  $(r, \theta, \phi)$  dargestellt:

$$\rho = \frac{2\gamma}{r^2} \frac{(1 + \sin^2 \phi \tan^2 \theta)}{\sin^2 \theta \tan^2 \theta} \frac{(g_\lambda^2 + g_\mu^2)}{\cosh^2(g)} \quad (5.15)$$

mit

$$\lambda = \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \quad (5.16a)$$

$$\mu = \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \quad (5.16b)$$

$$g_{\lambda\lambda} + g_{\mu\mu} = 0$$

Das Gravitationspotential ist gegeben durch (5.1b). Eine grafische Veranschaulichung des winkelabhängigen Anteils von  $\rho$  (5.15) findet man in Abbildung 7.

Zum Schluß sei noch angemerkt, wie man zu der Lösung (5.14) beziehungsweise (5.15) auch durch eine naive Verallgemeinerung der Lösung der zweidimensionalen Liouville-Gleichung (4.5a) gelangen kann: Macht man für die Lösung von (5.1a) in Anlehnung an (4.9) den Ansatz

$$\rho = c e^{-\frac{1}{\gamma} \Phi} = 2\gamma (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) \frac{1}{\cosh^2(h)} \quad (5.17)$$

und fordert

$$\Delta h = 0 \quad (5.18)$$

dann zeigt sich, daß (5.1a) nur dann erfüllt ist, wenn  $h(x, y, z)$  neben der Laplace-Gleichung (5.18) noch eine weitere Gleichung

$$\Delta \ln(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) = 0 \quad (5.19)$$

erfüllt. Man kann sich leicht überzeugen, daß (5.19) in zwei Dimensionen automatisch gilt, wenn  $h$  eine zweidimensionale Laplace-Gleichung erfüllt. Durch eine längere Rechenprozedur sieht man aber, daß die gemeinsamen Lösungen von (5.18) und (5.19) zusammen mit (5.17) genau zu der oben diskutierten Lösung führen, die hier aus dem ad-hoc Ansatz (5.3) beziehungsweise (5.5) gewonnen wurde.

In Analogie zu der in Abschnitt 4.1. erläuterten Prozedur könnte man nun von der Liouville-Gleichung (5.12) ausgehend, versuchen eine zeitabhängige Lösung aus (5.13) zu erzeugen. Die umfangreichen Rechnungen — die hier nicht weiter dargelegt werden sollen — zeigen aber, daß es nicht möglich ist mit der transformierten Dichte  $\rho \rightarrow J\rho$ ,  $\lambda \rightarrow \hat{\lambda}(\lambda, \mu, y)$ ,  $\mu \rightarrow \hat{\mu}(\lambda, \mu, t)$  ( $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  sind wieder Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion) die Kontinuitätsgleichung und die drei Euler-Gleichungen simultan zu erfüllen. Als Resultat dieser Transformationen verbleibt aber dennoch eine neue Lösung des Euler-Poisson-Systems (I.8), die aber zeitunabhängig ist und ein nichtverschwindendes Geschwindigkeitsfeld hat.

Daß es eine solche Lösung gibt, ist leicht einzusehen, wenn man von dem Ausdruck für  $\rho$  (5.5), (5.14) ausgeht und diesen in die auf  $(x, \alpha, \beta)$  transformierte Kontinuitätsgleichung (I.8a) einsetzt:

$$\frac{R_\alpha}{R} M + \frac{R_\beta}{R} N + x u_x + M_\alpha + N_\beta = 0 \quad (5.20)$$

wobei zur Abkürzung verwendet wurde

$$\begin{aligned} M &\equiv v - \alpha u \\ N &\equiv w - \beta u \end{aligned} \quad (5.21).$$

Nimmt man an, daß

$$M_x = N_x = u_x = 0$$

und

$$M_t = N_t = u_t = 0$$

gilt, so lauten die verbleibenden Eulergleichungen:

$$\begin{aligned} M u_\alpha + N u_\beta &= 0 \\ M (M + \alpha u)_{,\alpha} + N (M + \alpha u)_{,\beta} &= 0 \\ M (N + \beta u)_{,\alpha} + N (N + \beta u)_{,\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.22).$$

Soll  $R(\alpha, \beta)$  keine aus (5.20) resultierenden zusätzlichen Einschränkungen erfüllen, dann wird (5.20) und (5.22) offensichtlich gelöst von

$$M = 0, \quad N = 0 \quad (5.23)$$

Damit hat man eine *stationäre Lösung des Gravitationssystems* mit isothermer Zustandsgleichung gewonnen, bei der stets die Druckkräfte und die Gravitationskräfte im Gleichgewicht sind, das Geschwindigkeitsfeld jedoch nicht verschwindet:

$$\rho = \frac{2\gamma}{x^2} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{(g_\lambda^2 + g_\mu^2)}{\cosh^2(g)} \quad (5.24a)$$

$$g_{\lambda\lambda} + g_{\mu\mu} = 0$$

$$u = U(\alpha, \beta)$$

$$v = \alpha U(\alpha, \beta) \quad (5.24b)$$

$$w = \beta U(\alpha, \beta)$$

$U(\alpha, \beta)$  ist eine frei wählbare Funktion. Die Dichte hat als Gleichgewichtskonfiguration natürlich dieselbe Gestalt wie (5.14), (5.15) und das Geschwindigkeitsfeld ist nur noch eine Funktion der Winkelkoordinaten  $(\theta, \phi)$ , da es gemäß (5.4) eine 1-1-Transformation gibt zwischen  $(\alpha, \beta)$  und  $(\theta, \phi)$ .

Die Divergenz und Rotation dieses Geschwindigkeitsfeldes sind

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{2}{x} U(\alpha, \beta)$$

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{x} \left( \beta U_\alpha - \alpha U_\beta, \beta U + (1 + \beta^2) U_\beta + \alpha \beta U_\alpha, -(\alpha U + (1 + \alpha^2) U_\alpha + \alpha \beta U_\beta) \right) \quad (5.25)$$

Bemerkenswert an dieser Lösung (5.24) ist, daß sich die Kräfte immer das Gleichgewicht halten obwohl die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes (5.25) im allgemeinen nicht verschwindet, dabei aber alle Größen noch zeitunabhängig sind. Die Rotation von  $\vec{v}$  (5.25) verschwindet genau dann, wenn gilt

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \iff U(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}} = \cos \phi \sin \theta \quad (5.26).$$

## 5.2. Niveauflächen der Dichte

Interessante Aufschlüsse über die Struktur der Materieverteilung der Gleichgewichtskonfigurationen (5.14) bzw. (5.15) gibt die Untersuchung der Flächen konstanter Dichte. Benutzt man die Darstellung für  $\rho$  (5.14) in  $(x, \alpha, \beta)$  Koordinaten, dann sind die Niveauflächen  $\mathcal{N}$  auf denen  $\rho$  den konstanten Wert  $\rho_c$  hat, gegeben durch

$$\mathcal{N} : R(\alpha, \beta) - \rho_c x^2 = 0, \quad \rho_c = \text{const.} \quad (5.27a)$$

mit

$$R(\alpha, \beta) = 2\gamma \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{(g_\lambda^2 + g_\mu^2)}{\cosh^2(g)} \quad (5.27b)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\lambda, \mu$  und  $\alpha, \beta$  ist gegeben durch (5.11). Parametrisiert man  $\mathcal{N}$  (5.27) durch  $\alpha$  und  $\beta$ , so sind die Punkte von  $\mathcal{N}$  im dreidimensionalen Raum gegeben durch

$$(Z(\alpha, \beta), \alpha Z(\alpha, \beta), \beta Z(\alpha, \beta)) \quad (5.28a)$$

$$Z \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} \sqrt{R} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_c}} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{(1 + \alpha^2)} \frac{\sqrt{g_\lambda^2 + g_\mu^2}}{\cosh(g)} \quad (5.28b)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha^2} \\ \mu &= \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{1 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (5.28c)$$

$$0 = g_{\lambda\lambda} + g_{\mu\mu}$$

Eine Aussage über die globale Topologie der Niveauflächen läßt sich gewinnen mittels des *Gauss-Bonnet Theorems*, das eine Beziehung herstellt zwischen dem Integral der Gauß - Krümmung und den Zusammenhangsverhältnissen der Flächen (siehe Carmo 1983, Blaschke/Leichtweiß 1973, Dubrovin/Fomenko/Novikov 1984).

Die erste Fundamentalform (Metrik) der Flächen (5.28) lautet:

$$ds^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2 \quad (5.29a)$$

mit

$$E \equiv Z_\alpha^2 (1 + \alpha^2 + \beta^2) + Z^2 + 2\alpha Z Z_\alpha \quad (5.29b)$$

$$F \equiv Z_\alpha Z_\beta (1 + \alpha^2 + \beta^2) + Z(\alpha Z_\beta + \beta Z_\alpha) \quad (5.29c)$$

$$G \equiv Z_\beta^2 (1 + \alpha^2 + \beta^2) + Z^2 + 2\beta Z Z_\beta \quad (5.29d)$$

Die Determinante der ersten Fundamentalform (5.29) ist

$$EG - F^2 = Z^2 \left[ Z_\alpha^2(1 + \alpha^2) + Z_\beta^2(1 + \beta^2) + 2\alpha\beta Z_\alpha Z_\beta + 2\alpha Z Z_\alpha + 2\beta Z Z_\beta + Z^2 \right] \quad (5.30)$$

und das Oberflächenelement von  $\mathcal{N}$

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\alpha d\beta \quad (5.31).$$

Die Gauß Krümmung der Niveauflächen ist das Reziproke des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  die gegeben sind als die Wurzeln des Polynoms

$$(LN - M^2)\mathcal{R}^2 - (EN - 2FM + GL)\mathcal{R} + (EG - F^2) = 0 \quad (5.32).$$

Wobei  $L, M, N$  die Elemente der zweiten Fundamentalform bezeichnen und für (5.28) gegeben sind durch

$$L = \frac{Z(Z Z_{\alpha\alpha} - 2Z_\alpha^2)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (5.33a)$$

$$M = \frac{Z(Z Z_{\alpha\beta} - 2Z_\alpha Z_\beta)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (5.33b)$$

$$N = \frac{Z(Z Z_{\beta\beta} - 2Z_\beta^2)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (5.33c)$$

Im folgenden ist von wesentlicher Bedeutung die totale Krümmung, definiert durch

$$\kappa \equiv \int \int_{\mathcal{N}} K_g d\sigma \quad (5.34)$$

wobei die Gauß Krümmung  $K_g$  definiert ist durch

$$K_g = \frac{1}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (5.35).$$

Für die Flächen (5.28) lautet dann die totale Krümmung  $\kappa$ :

$$\kappa = \int \int_{\mathcal{N}} d\alpha d\beta \left\{ \frac{Z(Z_{\alpha\alpha} Z_{\beta\beta} - Z_{\alpha\beta}^2) - 2(Z_\alpha^2 Z_{\beta\beta} + Z_\beta^2 Z_{\alpha\alpha} - 2Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha\beta})}{[Z_\alpha^2(1 + \alpha^2) + Z_\beta^2(1 + \beta^2) + 2\alpha\beta Z_\alpha Z_\beta + 2\alpha Z Z_\alpha + 2\beta Z Z_\beta + Z^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (5.36)$$

Die einzige frei wählbare Funktion in der Dichteverteilung (5.14) ist  $g(\lambda, \mu)$ , die eine zweidimensionale Laplace-Gleichung bezüglich der  $\lambda, \mu$  Koordinaten erfüllen muß. Den Ausdruck für  $Z(\alpha, \beta)$  (5.28b) eingesetzt in (5.36) ergibt einen sehr langen,

unübersichtlichen Integranden. Für beliebiges  $g(\lambda, \mu)$  erscheint es unmöglich das Integral in (5.36) explizit auszuwerten.

Im folgenden soll deshalb nur für spezielle Beispiele dieses Integral numerisch berechnet werden und mittels des *Gauss-Bonnet Theorems* eine Aussage über die globale Topologie dieser speziellen Dichteverteilungen abgeleitet werden.

**Das Gauss-Bonnet Theorem** besagt folgendes (Carmo 1983):

Sei  $S \subset \mathcal{N}$  ein kompaktes Flächenstück der orientierten Niveaufläche  $\mathcal{N}$  (gegeben durch 5.28) und sei  $K_g$  die Gauß Krümmung und  $d\sigma$  das Oberflächenelement von  $\mathcal{N}$  (gegeben durch (5.31)), dann gilt

$$\int \int_S K_g d\sigma = 4\pi(1 - \mathcal{G}) \quad (5.37)$$

$\mathcal{G}$  heißt das *Geschlecht* des Flächenstücks und ist eine positive ganze Zahl.

Der Wert von  $\mathcal{G}$  erlaubt einen Schluß auf die globale Topologie des Flächenstückes.  $\mathcal{G} = 0$  bedeutet, daß die Flächen homöomorph sind zu einer Kugeloberfläche im dreidimensionalen Raum (das heißt die Fläche läßt sich durch stetige Deformationen in eine Kugeloberfläche überführen). Für  $\mathcal{G} = 1$  verschwindet die Gauß Krümmung und die Flächen sind homöomorph zu einem Torus. Allgemein ist eine Fläche mit Geschlecht  $\mathcal{G}$  stets homöomorph zu einer Kugeloberfläche mit  $\mathcal{G}$  Henkeln.

Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Gauss-Bonnet Theorems auf die Flächen (5.28) sind gegeben, weil zum einen die Dichte (5.14) bzw. (5.15) für jede Wahl von  $g(\lambda, \mu)$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null geht und zum anderen sind die Niveauflächen als Graph einer impliziten Funktion (5.27) sicher orientierbar. Würde es nicht-kompakte Niveauflächen geben, das heißt Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken, so könnten das nur die Flächen mit  $\rho_c = 0$  sein, da  $\rho$  im Unendlichen verschwindet.

Nun soll durch spezielle Beispiele gezeigt werden, daß die Dichteverteilung der Gleichgewichtskonfigurationen (5.14) bzw. (5.15) Niveauflächen haben können, die mehrfach zusammenhängend sind, das heißt für die  $\mathcal{G} \geq 1$  gilt.

Die Beispiele unterscheiden sich durch verschiedene Wahl der Funktion  $g(\lambda, \mu)$ . Die einfachste Lösung der Laplace-Gleichung ist die rotationssymmetrische Grundlösung

$$\text{Beispiel 1:} \quad g = \ln(\lambda^2 + \mu^2) \quad (5.38a).$$

für die  $Z(\alpha, \beta)$  in (5.28) lautet

$$Z = 4\sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_c}} \frac{\sqrt{(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2)}}{\alpha^4 + 2\alpha^2 + \beta^4 + 2\beta^2 + 2} \quad (5.38b)$$

Eine grafische Darstellung der zweidimensionalen Schnitte  $r = \text{const.}$  der entsprechenden Dichte (5.15) findet man in Abbildung 7a. Das Integral (5.36) mit (5.38b) wurde numerisch ausgewertet. Dazu wurde eine fertige Prozedur aus der NAG Bibliothek des Rechenzentrums Garching verwendet. Das Integrationsgebiet erstreckt sich über die gesamte Niveaufläche, das heißt das Integrationsgebiet ist  $-\infty < \alpha < \infty, -\infty < \beta < \infty$ . Es ist zu beachten, daß die totale Krümmung  $\kappa$  beziehungsweise das Geschlecht  $\mathcal{G}$  nicht vom Wert der Dichte  $\rho_c$  der entsprechenden Niveaufläche abhängt. Die globale topologische Struktur der Materieverteilung ist somit alleine bestimmt durch die Vorgabe der Funktion  $g(\lambda, \mu)$ . Das Ergebnis für das Beispiel 1 (5.38) ist nun:

$$\text{Beispiel 1:} \quad \mathcal{G} = 3 \quad (5.39).$$

Das Beispiel 2 sei bestimmt durch die Wahl

$$\text{Beispiel 2:} \quad g = \lambda \quad (5.40a)$$

wofür  $Z(\alpha, \beta)$  lautet

$$Z = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_c}} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{(1 + \alpha^2) \cosh(\frac{\alpha\beta}{1 + \alpha^2})} \quad (5.40b)$$

Eine grafische Veranschaulichung der zu (5.40) gehörigen Dichteverteilung findet man in Abbildung 7b. Das Ergebnis der numerischen Berechnung von (5.36) mit (5.40b) ergibt einen Wert für  $\mathcal{G}$  (5.37):

$$\text{Beispiel 2:} \quad \mathcal{G} = 4 \quad (5.41)$$

Somit ist für einfache Beispiele gezeigt, daß die Gleichgewichtskonfigurationen (5.14), (5.15), die keine Symmetrie besitzen, eine Topologie der Materieverteilung zulassen, bei der die Flächen konstanter Dichte mehrfach zusammenhängend sind. Eine allgemeine Aussage für beliebige Wahl von  $g(\lambda, \mu)$  erscheint wegen der Komplexität von (5.36) unmöglich zu sein. Als Maß für die "Größe" der Niveauflächen kann man einfach den Flächeninhalt  $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O} = \int \int_{\mathcal{M}} \sqrt{EG - F^2} d\alpha d\beta \quad (5.42)$$

verwenden. Wegen (5.28b) und (5.30) ändert sich  $\mathcal{O}$  mit dem Wert der Dichte auf der entsprechenden Fläche  $\rho_c$  wie

$$\mathcal{O} \propto \frac{1}{\rho_c} \quad (5.43).$$

Das Geschlecht  $\mathcal{G}$  ist jedoch unabhängig von  $\rho_c$ . Das bedeutet die Topologie der Materieverteilung ist auf allen Längenskalen die gleiche, was an eine Art fraktale Struktur erinnert.

### III. SCHLUSSBEMERKUNGEN

In den vorangehenden Kapiteln wurden Modelle angegeben für die Beschreibung von Dichteinhomogenitäten, die anwendbar sind auf ein Stadium der Verdichtung, für das die störungstheoretische Behandlung nicht mehr gültig ist. Im folgenden sollen kurz die Anwendbarkeit im Rahmen eines Szenariums der Galaxienentstehung diskutiert werden und Ausblicke auf weitergehende Untersuchungen angegeben werden.

Für alle in Kapitel II dargelegten Modelle wurde die Expansion des Hintergrundes vernachlässigt, was eine realistische Beschreibung liefert, wenn der Kollaps so weit fortgeschritten ist, daß die typische Zeitskala der gravitativ bedingten Kontraktion (freie Fallzeit  $\propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ ) klein ist gegenüber der typischen Zeitskala der Expansion ( $\frac{1}{H}$ ,  $H$  = Hubble-Parameter des Hintergrundes). Das bedeutet die Modelle sind realistisch in einem Stadium, in dem man die Verdichtungen der Materie praktisch als isolierte Objekte behandeln kann, die vom Gravitationsfeld des Hintergrunds entkoppelt sind.

Unter diesen Voraussetzungen beschreibt das Modell aus Kapitel II.2 einen anisotropen Kollaps, bei dem die Bewegung in einer Richtung dominiert. Anwendbar ist diese Lösung sicher im Rahmen des "pancake" Modells, sowohl für baryonische Strukturen als auch für Neutrino-dominierte Szenarien zur Beschreibung von Verdichtungen auf der Skala von Galaxienhaufen und Superhaufen. Die Idealisierung liegt in der Annahme, daß zwei Eigenwerte des Expansionstensors für *alle Zeiten* verschwinden. Dies bedeutet natürlich eine starke Beschränkung, da die Entwicklungsgleichungen der Eigenwerte die Anfangsbedingungen zweier verschwindender Eigenwerte nicht erhalten. Weitergehende Untersuchungen müßten zeigen, daß Störungen, die nichtverschwindende Bewegungen senkrecht zur Hauptkontraktionsrichtung erzeugen, klein bleiben im Vergleich zum nichtverschwindenden Eigenwert des Expansionstensors der exakten Lösung. Die Untersuchung linearer Störungen der exakten Lösung würde Aufschluß über das Fragmentationsverhalten solcher "pancake"-artiger Strukturen liefern. Von Interesse ist die Frage, ob die flachen "pancake" Strukturen wirklich die Phase des Kollaps überdauern, in der Druckkräfte noch keine Rolle spielen oder schon zerfallen bevor die Materie eine stabile Konfiguration erreicht hat, in der die Gravitationskräfte durch den Gasdruck kompensiert werden. Nimmt man an, daß die "pancake" Struktur während der druckfreien Phase erhalten bleibt, dann muß die Fragmentation in Unterstrukturen bestimmt werden aus den "pancake" Modellen mit nichtverschwindenden Gasdruck wie sie in Kapitel II.3 angegeben wurden.

Das wesentliche Ergebnis aus Kapitel II.3 ist der Nachweis der Existenz solitonartiger, flacher Strukturen, die durch den Gasdruck gegen die attraktive Gravitationskraft stabilisiert werden. Ist das Resultat des Gravitationskollaps auf großen Skalen (vernachlässigbarer Gasdruck) die Entstehung von "pancakes", so kann man erwarten,

daß aus dem Stadium, in dem der Gasdruck eine wesentliche Rolle spielt, im wesentlichen die gravitativen Solitonen übrigbleiben, da sie zum einen stabil sind auf allen Skalen gegenüber Störungen und zum anderen ihre Gestalt unter gegenseitiger Wechselwirkung erhalten. Die typisch nichtlineare Beziehung zwischen Amplitude und Breite dieser Strukturen könnte eine Erklärung liefern für die Abhängigkeit der heute beobachteten Dichteinhomogenitäten von der Skalenlänge. Dies setzt wiederum voraus, daß die nachfolgende Fragmentation und eventuelle Sternentstehungsmechanismen diese Beziehungen nicht zerstören. Eine Untersuchung von transversalen Störungen der in II.3 diskutierten Strukturen kann darüber Aufschluß geben. Außerdem zeigen diese Untersuchungen typisch nichtlineare Phänomene und ihre herausragende Bedeutung im Strukturbildungsprozeß, wie sie von keiner Störungstheorie erfaßt werden.

Das Modell für längliche, filamentartige Verdichtungen aus Kapitel II.4 zeigt, daß bei Berücksichtigung des nichtlinearen Charakters selbstgravitierender Systeme eine rapide Verdichtung in streng lokalisierte Objekte selbst bei nichtverschwindendem Gasdruck möglich ist. Die lineare Störungstheorie sagt ein Anwachsen der Dichte gemäß einem Potenzgesetz voraus, was zu dem Problem der zu kurzen Zeitspanne führt, die für die Verdichtung in die heute beobachteten Strukturen zur Verfügung steht. Das exponentielle Anwachsen der Dichte in der nichtlinearen Phase des Kollaps, wie in II.4 diskutiert, kann zumindest einen Hinweis zur Lösung dieses Problems sein. Auch hier ist natürlich die Frage der Persistenz der dabei entstehenden Objekte eine entscheidende Frage für die Interpretation, die durch Untersuchungen von Störungen beantwortet werden kann.

Haben sich unter bestimmten Bedingungen Materiekonfigurationen entwickelt, bei denen die Gravitationskräfte vom Gasdruck kompensiert werden (virialisierte Endzustände des Gravitationskollaps), so liefern die Modelle in Kapitel II.5 eine Beschreibung solcher Dichteverteilungen, die keine manifeste Symmetrie besitzen. Bemerkenswert ist wohl die Möglichkeit einer nichttrivialen Topologie der Niveauflächen, die unabhängig ist von der Längenskala. Durch weitergehende Untersuchungen könnte man wohl einen Zusammenhang herstellen zu fraktalen Strukturen, wie es in einem anderen Kontext von Mandelbrot (siehe Mandelbrot 1983) versucht wurde. Stabilität, Fragmentation und die dabei auftretenden typischen Längen- und Zeitskalen kann man mittels einer Störungsrechnung untersuchen, die Aufschluß gibt über die Struktur der Zerfallsprodukte einer Gaswolke im hydrostatischen Gleichgewicht unter etwas realistischeren Bedingungen, als es die bislang untersuchten hochsymmetrischen Konfigurationen erlaubten.

IV. ABBILDUNGEN

Abbildung 1: Zusammenhang der verschiedenen Beschreibungsarten eines N-Teilchen-Systems. Der Gehalt an Information nimmt in Richtung der Pfeile ab.

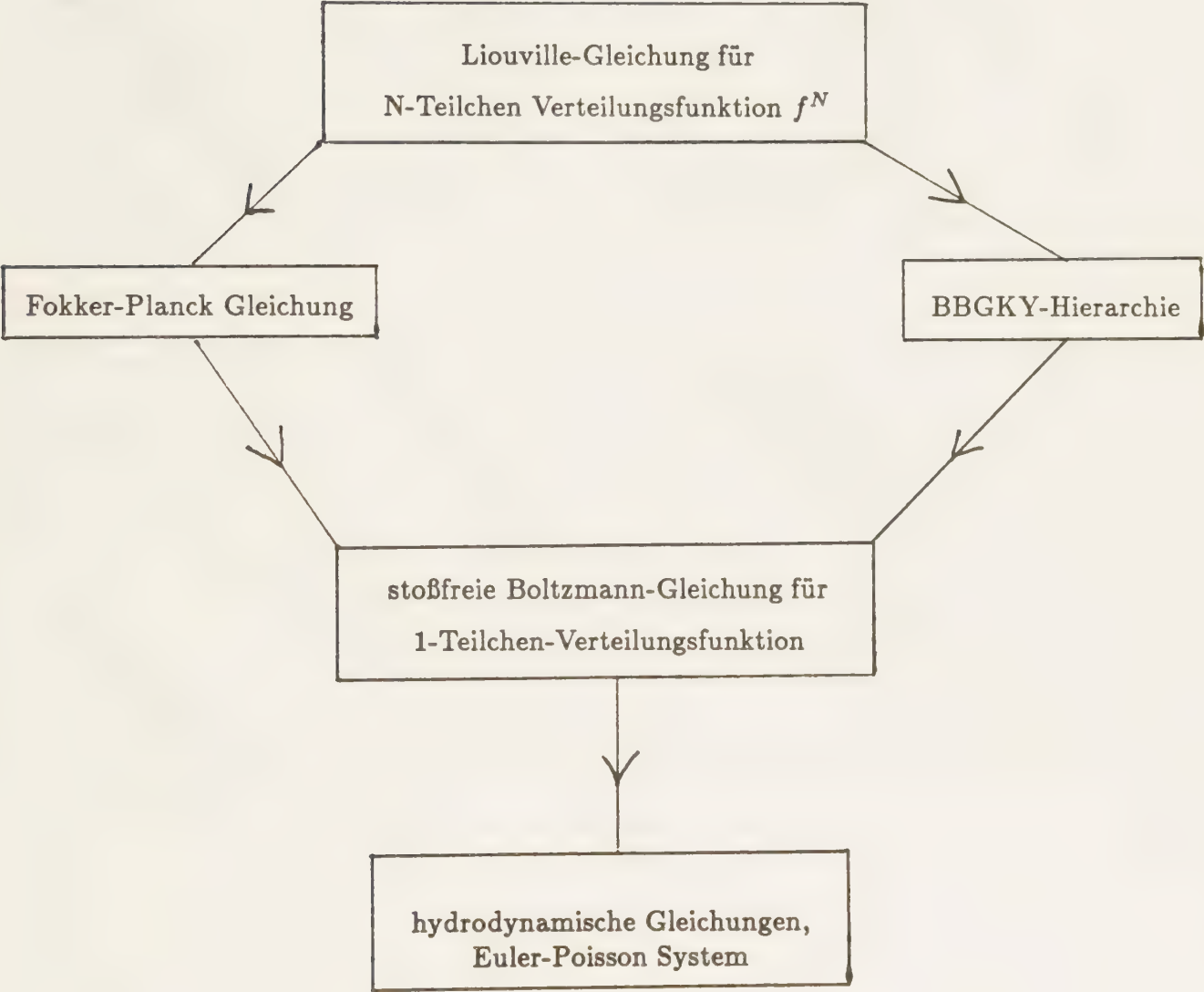
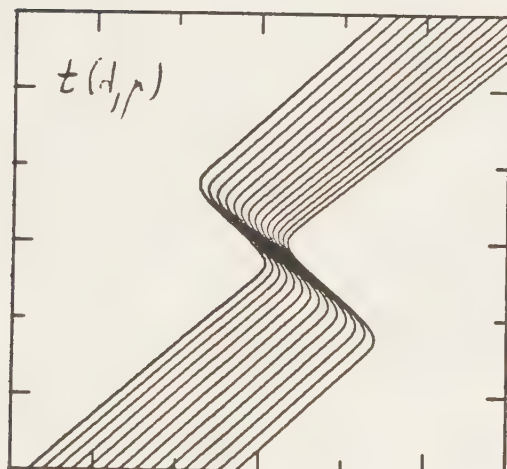
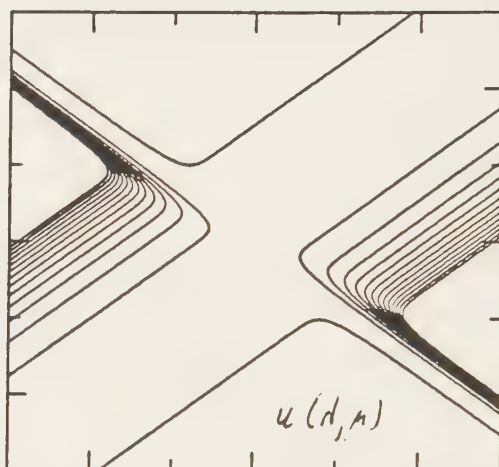
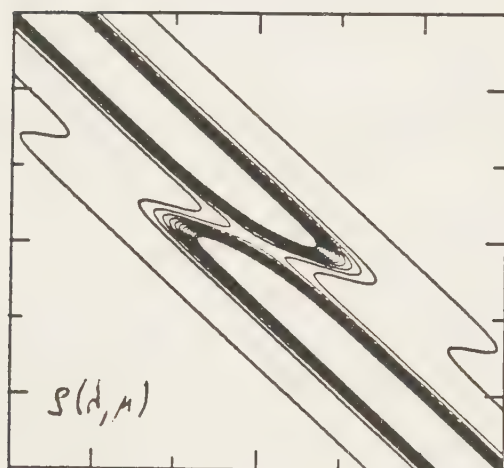


Abbildung 2: Kontourplot der Dichte  $\rho$ , des Geschwindigkeitsfeldes  $u$  und der Zeit  $t$  als Funktion der charakteristischen Koordinaten  $\lambda, \mu$  für die Zwei-Soliton Lösung (3.47)



**Abbildung 3:** Kontourplot der Dichte  $\rho$ , des Geschwindigkeitsfeldes  $u$  und der Zeit  $t$  als Funktion der charakteristischen Koordinaten  $\lambda, \mu$  für den Puls auf einem homogenen Hintergrund (3.57)

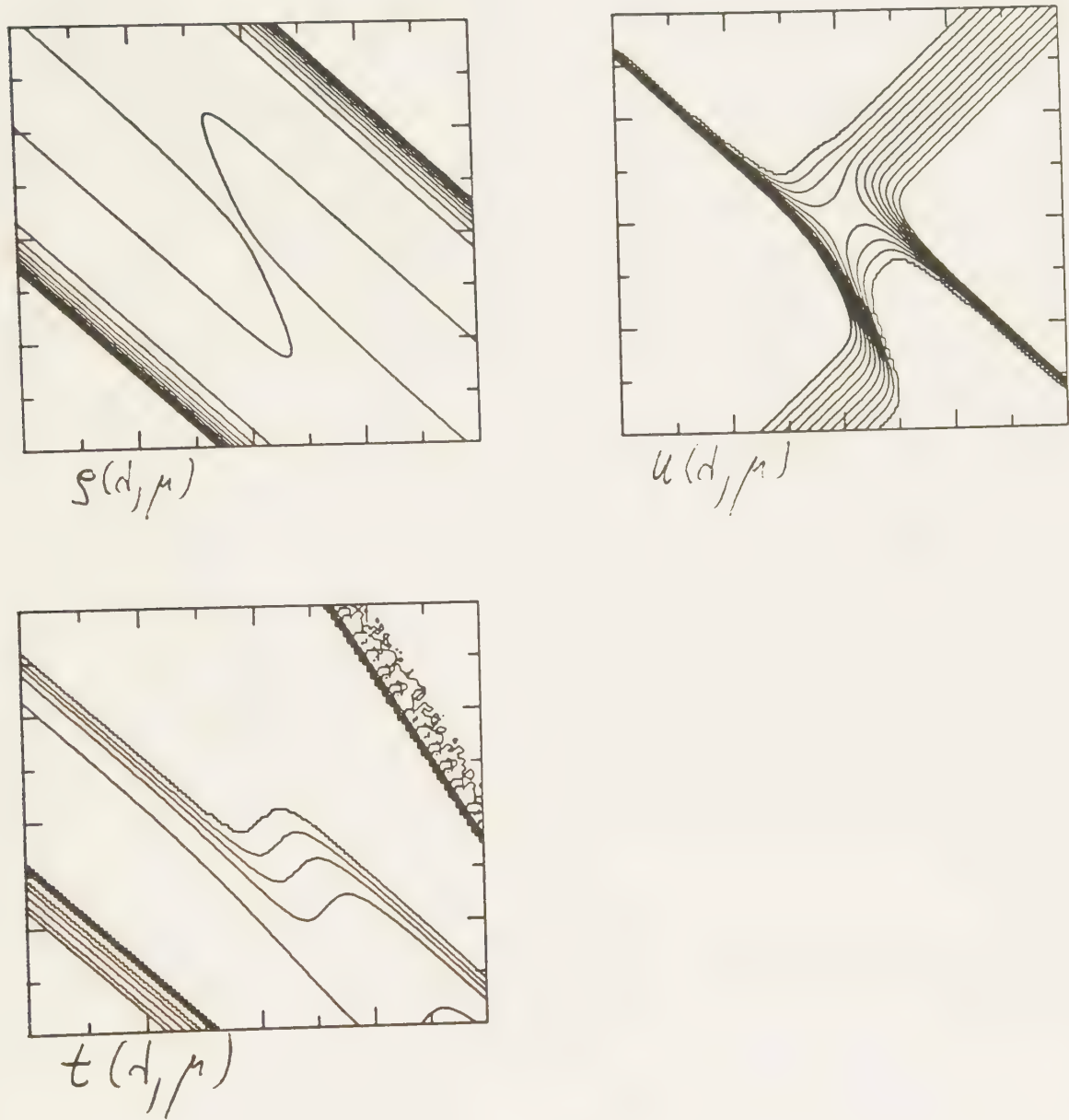


Abbildung 4a: Kontourplot der Dichte  $\rho$ , des Geschwindigkeitsfeldes  $u$  und der Zeit  $t$  als Funktion der charakteristischen Koordinaten  $\lambda, \mu$  für die Lösung (3.70) ("Breather I")

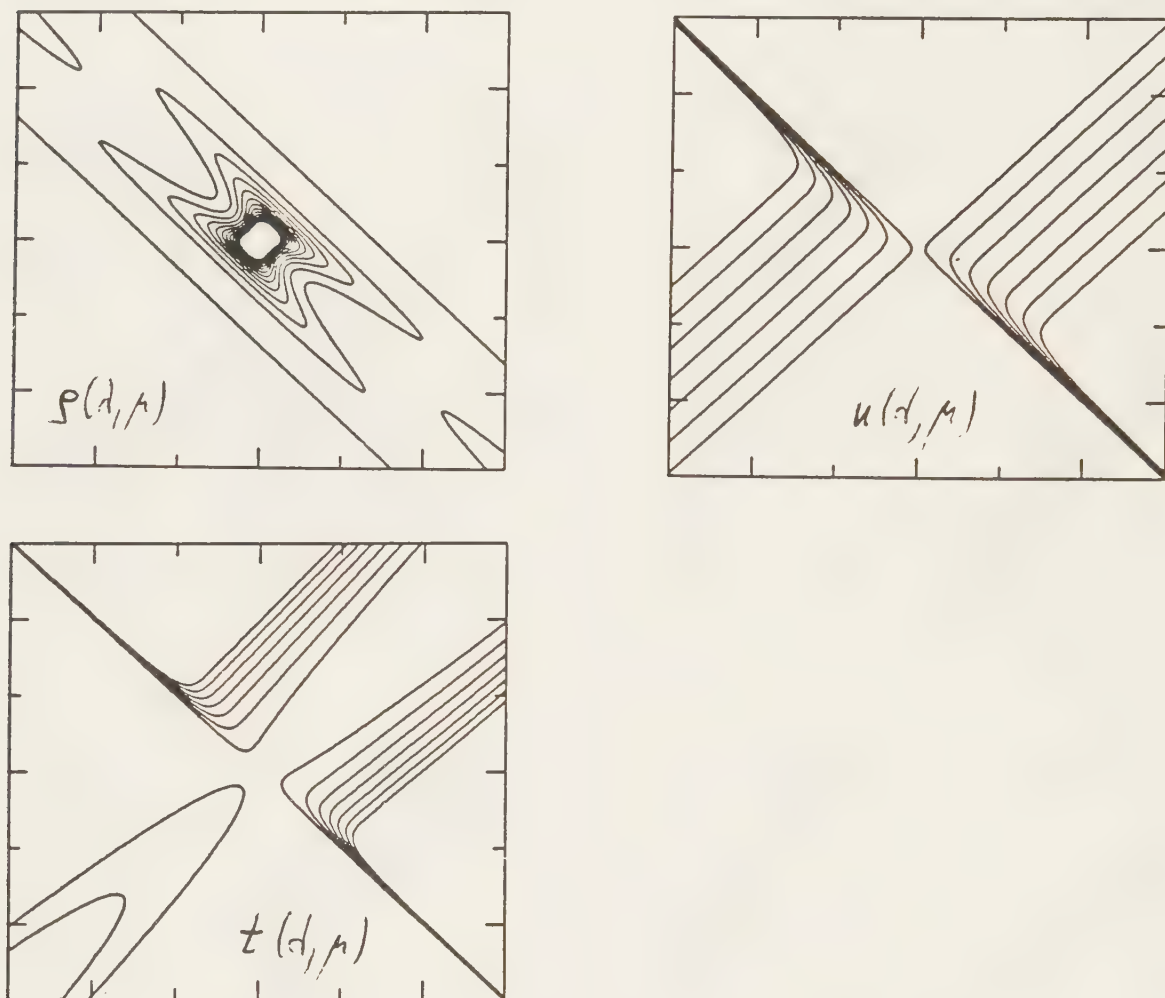


Abbildung 4b: Dichteverlauf bei  $t = 0$  für die Lösung (3.70)

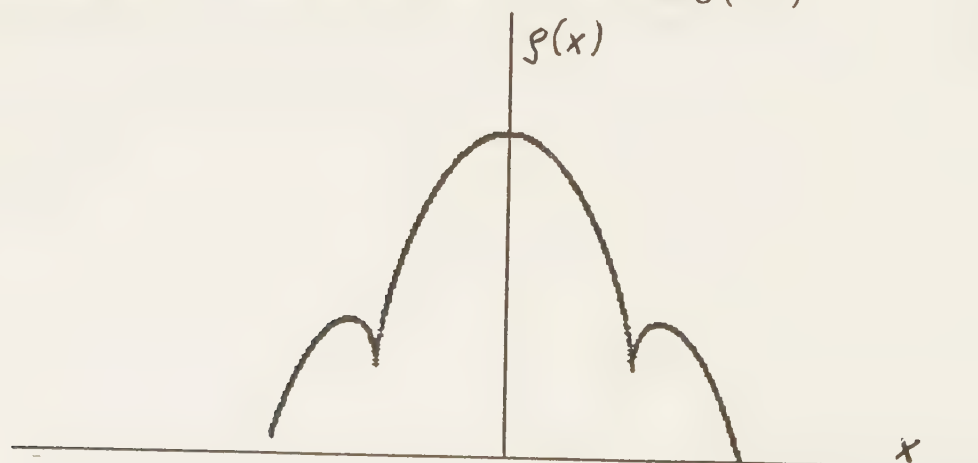


Abbildung 5: Kontourplot der Dichte  $\rho$ , des Geschwindigkeitsfeldes  $u$  und der Zeit  $t$  als Funktion der charakteristischen Koordinaten  $\lambda, \mu$  für die Lösung (3.82) ("Breather II")

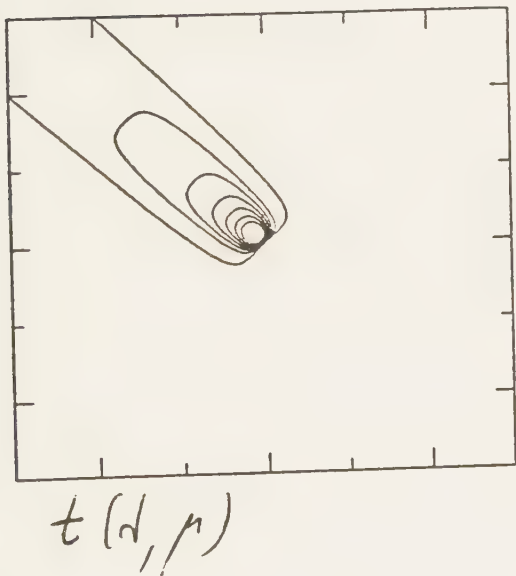
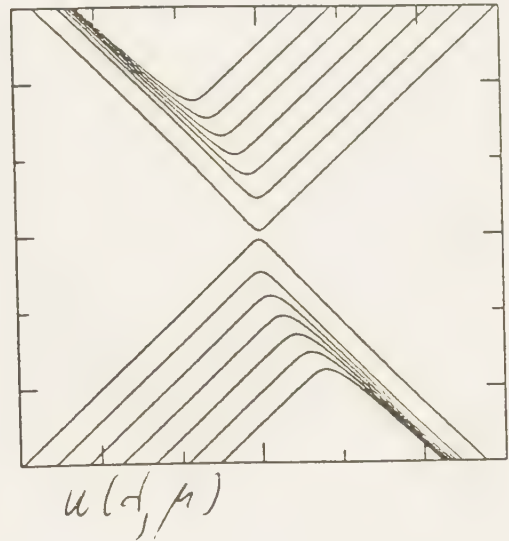
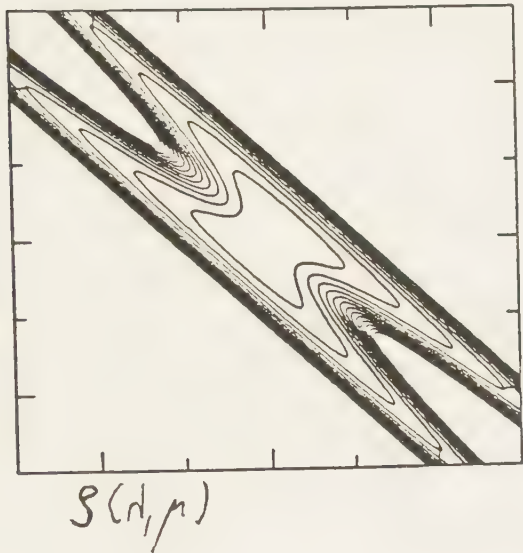


Abbildung 6: Linien konstanter Dichte in der  $(x,y)$ -Ebene für die Dichteverteilung (4.42) bei  $t = 0$

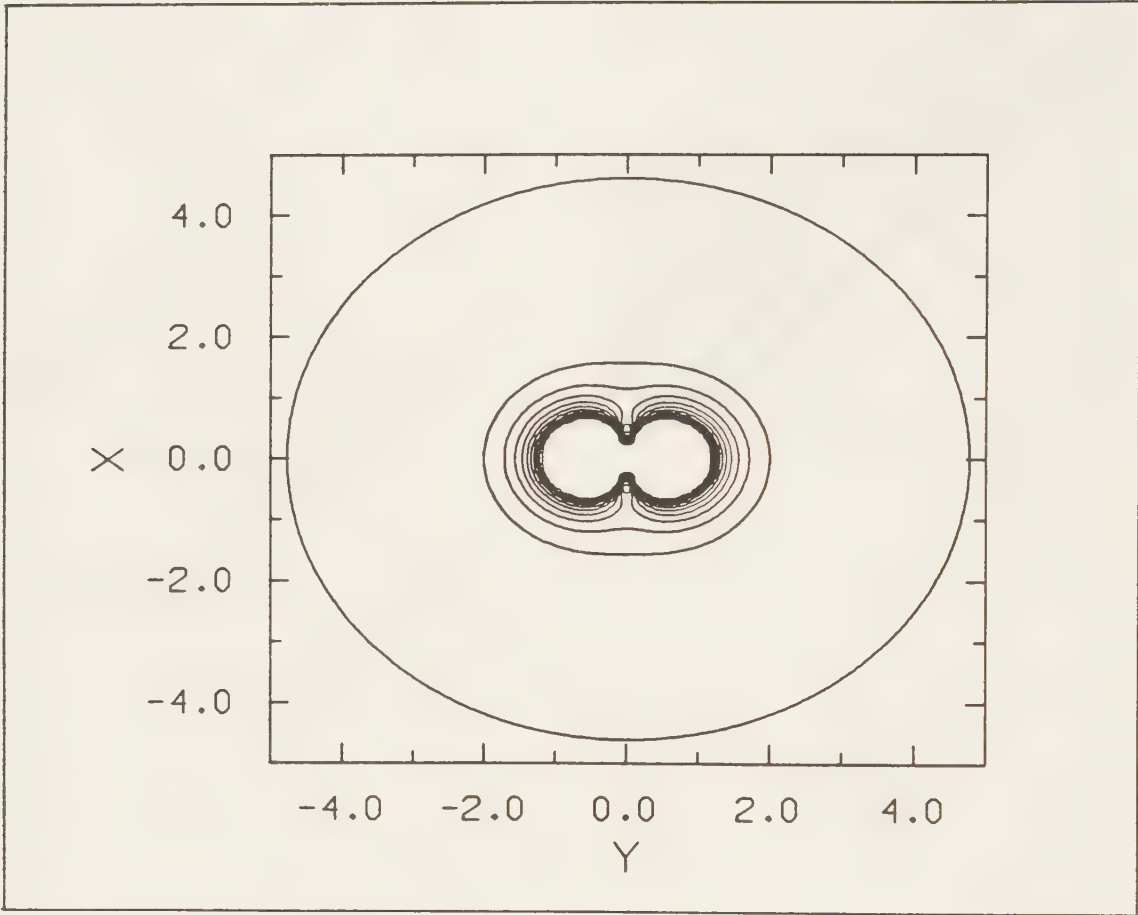


Abbildung 7a: Kontourplot der Schnitte  $r = \text{const.}$  der Dichteverteilung (5.15) für die Wahl

$$g = \ln(\lambda^2 + \mu^2)$$

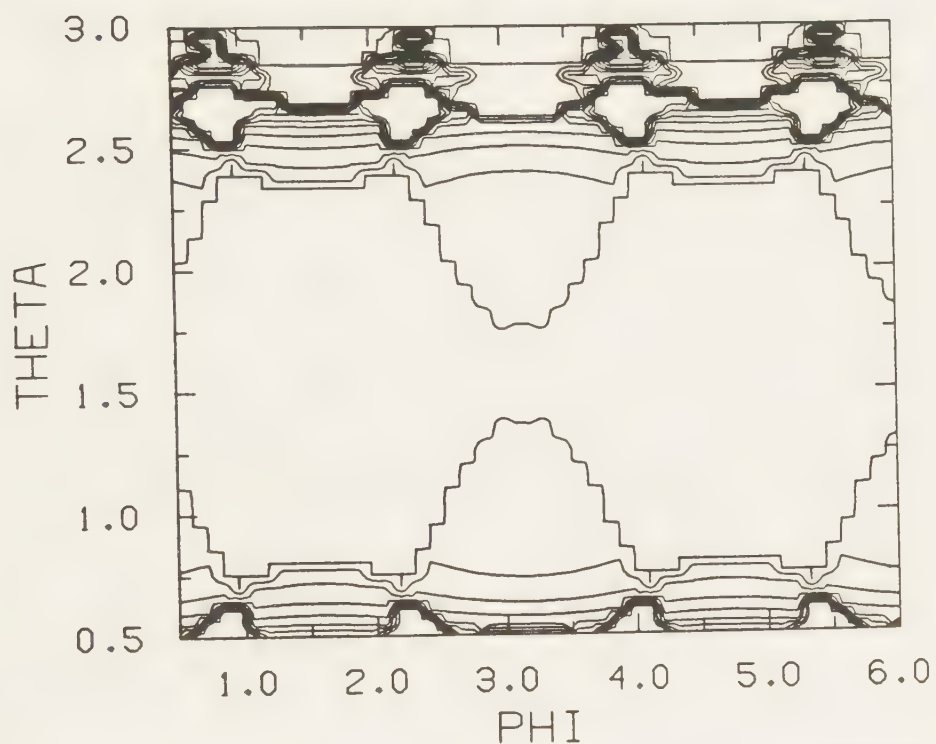
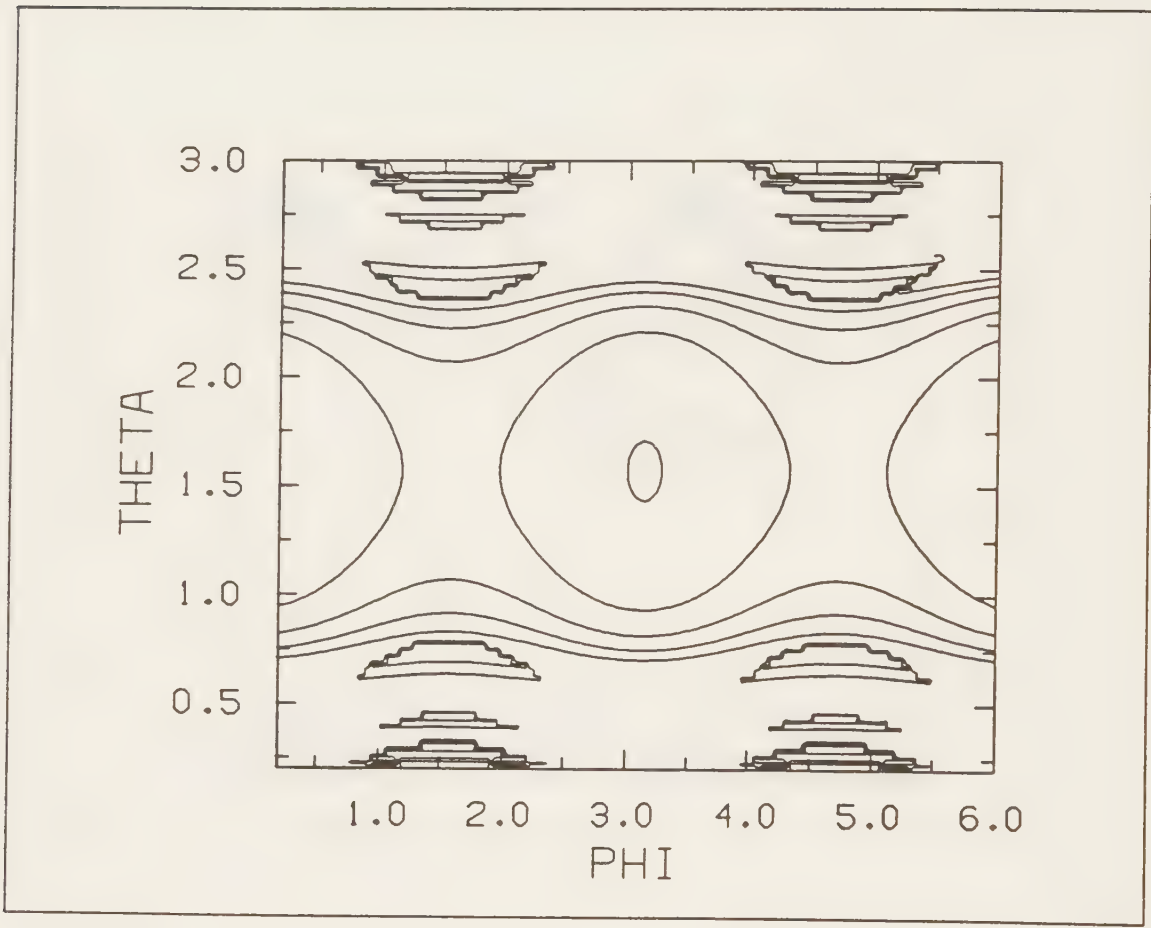


Abbildung 7b: Kontourplot der Schnitte  $r = \text{const.}$  der Dichteverteilung (5.15) für die Wahl

$$g = \lambda$$



## V. LITERATUR

- Aarseth S.J. (1985): Direct methods for N-body simulations, in: Multiple time scales, ed. by J.U. Brackbill, B. I. Cohen, Academic Press, Orlando
- Aarseth S.J., Gott J.R., Turner E. (1979a): *ApJ* 228, 664
- Aarseth S.J., Gott J.R., Turner E. (1979b): *ApJ* 228, 684
- Ablowitz M.J. (1974): *Stud. in Appl. Math. Vol. LIII*, 249
- Ablowitz M.J., Segur H. (1981): *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia
- Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. (1973): *Phys. Rev. Lett.* 30, 1262
- Ablowitz M.J. et al. (1987): *Topics in soliton theory and exactly solvable nonlinear equations*, World Scientific, Singapore; Oberwohlfach July 1986
- Anderson R.L., Ibragimov N.H. (1979): *Lie-Bäcklund transformations in applications*, SIAM Philadelphia
- Anile A.M. (1983): Nonlinear wave propagation in relat. hydrodyn. and cosmology, in: *Gen. Rel. Grav.*, 10-th GRG meeting, ed. by Bertotti et al., Padua
- Arnold V.I., Shandarin S.F., Zeldovich Y.B. (1982): *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 20, 111
- Asano N. (1974): *Suppl. of the Progr. of Theor. Phys.* 55, 52
- Audouze J., Tran Thanh Van J. (ed.), (1984): *Formation and evolution of galaxies and large structures in the universe*, NATO series 117, Reidel, Dordrecht
- Baptista J.P., Gerbal D. (1980): *Astrophys. and Space Science* 73, 349
- Bardeen J.M. (1980): *Phys. Rev. D* 22, 1882
- Barrow J.D. (1980): *Phil. Trans. R. Soc. London A* 296, 273–289
- Barrow J.D., Silk J. (1981): *ApJ* 250, 432
- Bertschinger E. (1983): *ApJ* 268, 17
- Bilenky S.M., Petcov S.T. (1987): *Rev. Mod. Phys.* 59, 671–754
- Bisnovatyi-Kogan G.S., Zeldovich Y.B. (1971): *Sov. Astron.* 14, 758
- Bisnovatyi-Kogan G.S., Novikov I.D. (1981): *Sov. Astron.* 24, 516
- Blaschke W., Leichtweiß K. (1973): *Elementare Differentialgeometrie*, Springer, Berlin
- Blumenthal G.R., Pagels H., Primack J.R. (1982): *Nature* 299, 37
- Bond J.R., Centrella J., Szalay A.S. (1984): *MNRAS* 210, 515

- Bond J.R., Efstathiou G., Silk J. (1980): Phys. Rev. Lett. 45, 1980
- Bond J.R., Kolb E.W., Silk J. (1982): ApJ 255, 341
- Bond J.R., Szalay A.S. (1983): ApJ 274, 443
- Bond J.R., Szalay A.S., White D.M. (1983): Nature 301, 584
- Bonnor W.B. (1956a): Zeitschrift für Astrophysik 39, 143
- Bonnor W.B. (1956b): MNRAS 116, 351
- Bonnor W.B. (1957): MNRAS 117, 104
- Bouchet F.R., Kendrup H. (1985): ApJ 299, 1
- Brandenberger R., Kahn R., Press W. (1983): Phys. Rev. D28, 1809
- Buchert T., Götz G. (1987): J. Math. Phys. 28, 2714
- Bullough R.K., Caudrey P.J. (1980): Solitons, Springer, Berlin
- Calogero F., Degasperis A. (1982): Spectral transform and solitons I, North-Holland, Amsterdam
- Carlitz R., Frautschi S., Nahm W. (1973): AA 26, 171
- Carmo M.P. do (1983): Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig
- Carr B.J., Silk J. (1983): ApJ 268, 1
- Caudrey P.J. et al. (1973): Phys. Rev. Lett. 30, 237
- Centrella J., Melott A.L. (1983): Nature 305, 196
- Chandrasekhar S. (1957): An introduction to stellar structure, Dover Publ.
- Chellone D.S. (1981): J. Phys. A Math. Gen. 14, 2339
- Courant R., Hilbert D. (1968): Methoden der mathematischen Physik Bd.II, Springer, Heidelberg
- Cowsik R., McClelland J. (1973): ApJ 180, 7
- Crawford M., Schramm D.N. (1982): Nature 298, 538
- Dallaporta N., Lucchin F. (1973): AA 26, 325
- Davies R.D. et al. (1987): Nature 326, 462
- Davis M., Efstathiou G., Frenk C.S., White S.D. (1985): ApJ 292, 371
- Davis M., Lecar M., Pryor C., Witten E. (1981): ApJ 250, 423
- Dekel A. (1984): ApJ 284, 445
- Dekel A., Aarseth S.J. (1984): ApJ 283, 1

- Dekel A., Rees M. (1987): *Nature* 326, 455
- Dodd R.K., Bullough R.K. (1976): *Proc. R. Soc. London* A351, 499
- Dodd A., Eckmann B. (ed.), (1976): *Bäcklund transformations*, *Lect. Notes in Math.* 515, Springer, Berlin
- Doroshkevich A.G. et al. (1980): *MNRAS* 192, 321
- Doroshkevich A.G. (1984): *Sov. Astr.* 28, 378
- Doroshkevich A.G., Klypin A.A., Kotok E.V. (1986): *Sov. Astr.* 30, 251
- Doroshkevich A.G., Ryabenkii V.S., Shandarin S.F. (1975): *Astrophysics* 9, 144
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F. (1977): *Sov. Astr.* 21, 414
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F., Zeldovich Y.B. (1982): *Comm. Astrophys.* 9, 265
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F., Saar E. (1978): *MNRAS* 184, 643
- Doroshkevich A.G., Zeldovich Y.B. (1964): *Sov. Astr.* 7, 615
- Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. (1984): *Modern geometry part I*, *Graduate texts in mathematics* 93, Springer, New York
- Efstathiou G., Silk J. (1983): *Fund. of Cosmic Physics* 9, 1–138
- Eilenberger G. (1981): *Solitons*, Springer, Berlin
- Ellis G.F.R. (1971): *Relativistic Cosmology*, in: *Proc. of Enrico-Fermi School, Course XLVII*, ed. by B.K. Sachs, Academic Press, New York
- Faber S. (ed.), (1987): *Nearly Normal Galaxies*, *Santa Cruz Summer Workshop*, Springer, New York
- Elmgreen B.G., Elmgreen D.M. (1978): *ApJ* 220, 1051
- Filmore J.A., Goldreich P. (1984): *ApJ* 281, 1
- Frenk C.S., White S.D., Davis M. (1983): *ApJ* 271, 417
- Fridman A.M., Polyachenko V.L. (1984): *Physics of gravitating systems*, Vol. I, II; Springer New York
- Frieman J.A., Will C.M. (1982): *ApJ* 259, 437
- Frieman J.A., Turner M.S. (1984): *Phys. Rev. D* 30, 265
- Fry J.N. (1986): *ApJ* 306, 358
- Gardner C.S. et al. (1967): *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095
- Gilbert I.H. (1966): *ApJ* 144, 233
- Glass E.N. (1980): *J. Phys. A* 13, 3097

- Gott J.R. (1977): *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* 15, 235
- Gott J.R., Rees M. (1975): *AA* 45, 365
- Gott J.R., Melott A.L., Dickinson M. (1986): *ApJ* 306, 341
- Goursat E. (1896): *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Tomes I, II; Librairie scientifique A. Hermann, Paris
- Heath D.J. (1982): *ApJ* 259, 9
- Heavens A. (1985): *MNRAS* 213, 143
- Heckmann O., Schücking E. (1955): *Zeitschrift für Astrophysik* 38, 95
- Heckmann O., Schücking E. (1956): *Zeitschrift für Astrophysik* 40, 81
- Henriksen R.N., Robertis D.M. (1980): *ApJ* 241, 54
- Hogan C.J. et al. (1985): *Fermilab-Conf.-85/57-A*
- Ikeuchi S., Norman C.A. (1987): *ApJ* 312, 485
- Jones B.J.T. (1976): *Rev. Mod. Phys.* 48, 107
- Jones B.J.T. (1980): *Phil. Trans. R. Soc. London A* 296, 289–299
- Jones B.J.T., Palmer P.L., Wyse R.F. (1981): *MNRAS* 197, 967
- Jones B.J.T., Palmer P.L. (1985): The origin of large scale cosmic structure, in: *Galaxies, axisymm. systems in relativity*, ed. by M.A.H. McCallum, Cambridge Univ. Press
- Juszkiewicz R. (1981): *MNRAS* 197, 931
- Kaiser N. (1982): *MNRAS* 198, 1033
- Kates R. (1986): *AA* 168, 1
- Kato S., Nariai H., Tomita K. (1967): *Publ. of the Astr. Soc. of Japan* 19, 130
- Kaup D.J. (1975): *Stud. in Appl. Math.* LIV, 165
- Kaup D.J., Newell A.C. (1978): *SIAM J. Appl. Math.* 34, 37
- Kendrup H. (1982): *ApJ* 259, 1
- Kihara T. (1967): *Publ. of the Astr. Soc. of Japan* 19, 121
- Klypin A.A., Shandarin S.F. (1983): *MNRAS* 204, 891
- Kolb E.W., Turner M.S., Lindley D., Olive K.A., Seckel D. (eds.), (1986) : *Inner Space, Outer Space*, Univ. of Chicago Press
- Kolykhalov P.I., Shandarin S.F. (1984): *Sov. Astr. Lett.* 10, 342
- Kompaneets D.A., Lukash V.N. (1981): *Sov. Astr.* 25, 272
- Kripfganz J., Perl H. (1986): *Class. Quantum Grav.* 3, 417

- Lamb G.L. (1971): *Rev. Mod. Phys.* 43, 99
- Lamb G.L. (1980): *Elements of soliton theory*, Wiley, New York
- Larson R.B. (1973a): *MNRAS* 161, 133
- Larson R.B. (1973b): Processes in collapsing interstellar clouds, in: *Ann. Rev. of Astr. and Astrophys.* Vol. 11, 219
- Larson R.B. (1985): *MNRAS* 214, 379
- Lawitzky G. (1979): *Diplomarbeit*, MPA München
- Ledoux P. (1951): *Ann. d'Astrophysique* 14, 438
- Liang E.P. (1976): *ApJ* 204, 235
- Liang E.P. (1977a): *ApJ* 211, 361
- Liang E.P. (1977b): *ApJ* 216, 206
- Liang E.P. (1979): *ApJ* 230, 325
- Liang E.P., Baker K. (1977): *Phys. Rev. Lett* 39, 191
- Lifshitz E.M., Khalatnikov I.M. (1964): *Sov. Phys. Usp.* 6, 495
- Lin C.C., Mestel L., Shu F.H. (1965): *ApJ* 142, 1431
- Lukash V.N. (1980): *Sov. Phys. JETP* 52, 807
- Magalinskii V.B. (1973): *Sov. Astron.* 16, 830
- Mandelbrot B.B. (1983): *The fractal geometry of nature*, Freeman, New York
- Melott A.L. (1982): *Phys. Rev. Lett.* 48, 894
- Melott A.L. (1983): *ApJ* 264, 59
- Morse P.M., Feshbach H. (1953): *Methods of theoretical physics*, part I, II, Mc Graw Hill, New York
- Mukhanov V.F. (1981): *Sov. Astr.* 25, 163
- Munier A. (1985): *ApJ* 290, 47
- Newell A.C. (1985): *Solitons in mathematics and physics*, Philadelphia
- Norman C.A., Silk J. (1978): *ApJ* 224, 293
- Novikov E.A. (1970): *Sov. Phys. JETP* 30, 512
- Novikov I.D. (1975): *Sov. Astr.* 19, 627
- Nurgaliev I.S. (1986): *Sov. Astr. Lett.* 12, 73
- Olson D.W. (1976): *Phys. Rev. D* 14, 327

- Olver P.J. (1986): Application of Lie-groups to differential equations, Grad. Texts in Mathematics Vol. 107, Springer, New York
- Oort J.H. (1970): AA 7, 381
- Oort J.H. (1983): Ann. Rev. Astr. Astrophys. 21, 373
- Ostriker J.P., Cowie L.L. (1981): ApJ 243, L127
- Palmer P.L. (1981a): MNRAS 197, 721
- Palmer P.L. (1981b): MNRAS 197, 167
- Palmer P.L. (1983): MNRAS 202, 561
- Peebles P.J.E. (1970): Phys Rev. D1, 397
- Peebles P.J.E. (1971): Astrophys. and Space Science 11, 443
- Peebles P.J.E. (1973): ApJ 180, 1
- Peebles P.J.E. (1980): The large-scale structure of the universe, Princeton Univ. Press, Princeton
- Peebles P.J.E. (1987): ApJ 317, 576
- Perrenod S.C. (1978): ApJ 224, 285
- Pietronero L. (1987): Physica 144A, 257
- Press W.H., Vishniac E.T. (1979): Nature 279, 137
- Press W.H., Vishniac E.T. (1980): ApJ 239, 1
- Sachs R.K., Wolfe A.M. (1967): ApJ 147, 73
- Saslaw W.C. (1968): MNRAS 141, 1
- Saslaw W.C. (1969): MNRAS 143, 437
- Saslaw W.C. (1970): MNRAS 147, 253
- Saslaw W.C. (1985): Gravitational physics of stellar and galactic systems, Cambridge Univ. Press, Cambridge
- Saslaw W.C., Aarseth S.J. (1982): ApJ 253, 470
- Sato H., Takahara F. (1981): Progr. of Theor. Phys. 66, 508
- Schaeffer R., Silk J. (1985): ApJ 292, 319
- Schmitz F., Ebert R. (1987): AA 181, 41
- Scott A.C., Chu F., McLaughlin D.W. (1973): Proc. of the IEEE 61, 1443
- Seliverstov V.V. (1974): Sov. Astron. 18, 170
- Shandarin S.F. (1983): Sov. Astr. Lett. 9, 104

- Shandarin S.F., Doroshkevich A.G., Zeldovich Y.B. (1983): *Sov. Phys. Usp.* 26, 46
- Shandarin S.F., Zeldovich Y.B. (1984): *Phys. Rev. Lett.* 52, 1488
- Shapiro P.R. (1984): Pancakes and galaxy formation, in: *Clusters and groups of galaxies*, ed. by F. Mardirossian, Reidel, Dordrecht
- Shapiro P.R., Struck-Marcell C., Melott A. (1983): *ApJ* 275, 413
- Shapiro P.R., Struck-Marcell C. (1985): *ApJ Suppl.* 57, 205
- Shu F.H./Adams F.C./Lizano S. (1987): *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 25, 23
- Silk J. (1967): *Nature* 215, 1155
- Silk J. (1968): *ApJ* 151, 459
- Silk J. (1974): *ApJ* 194, 215
- Silk J. (1977): *ApJ* 211, 638
- Silk J. (1980): Galaxy formation, in: *Fund. interactions and cosmology*, ed. by J. Audouze, J. Tran Than Van, Edition Frontieres, Gif sur Yvette
- Silk J., Wilson M.L. (1979): *ApJ* 228, 641
- Simon R. (1965a): *Ann. d'Astrophysique* 28, 40
- Simon R. (1965b): *Ann. d'Astrophysique* 28, 625
- Soloveva L.V., Nurgaliev I.S. (1985): *Sov. Astr.* 29, 267
- Starobinskii A.A. (1983): *Sov. Astr. Lett.* 9, 302
- Stewart J.M. (1972): *ApJ* 176, 323
- Sunyaev R.A., Zeldovich Y.B. (1972): *AA* 20, 189
- Suto Y., Sato K., Sato H. (1984): *Progr. of Theor. Phys.* 72, 1137
- Szalay A.S., Silk J. (1983): *ApJ* 264, L31
- Tohline J.E. (1982): *Fund. of Cosmic Physics* 8, 1-82
- Tomita K. (1967): *Prog. Theor. Phys.* 37, 831
- Tomita K. (1971): *Prog. Theor. Phys.* 45, 1747
- Tremaine S., Gunn J.E. (1979): *Phys. Rev. Lett.* 42, 407
- Trimble V. (1986): *Comm. Astrophys.* 11, 235
- Tsyтовich V.N. (1970): *Nonlinear effects in plasma*, Plenum, New York
- Valdarnini R. (1985): *AA* 143, 94
- Vishniac E.T. (1982a): *ApJ* 253, 446

- Vishniac E.T. (1982b): *Apj* 253, 457
- Vishniac E.T., Ostriker J.P., Bertschinger E.T. (1985): *ApJ* 291, 399
- Vittorio N., Silk J. (1984): *ApJ* 285, L39
- Voglis N. (1986): *AA* 165, 10
- Weinberg S. (1972): *Gravitation and cosmology*, Wiley, New York
- Weizsäcker C.F. von (1951): *ApJ* 114, 165
- Welter G.L. (1982): *AA* 105, 237
- White S.D., Frenk C.S., Davis M., Efstathiou G. (1987): *ApJ* 313, 505
- Whitham G.B. (1974): *Linear and nonlinear waves*, Wiley, New York
- Woodward P.R. (1976): *ApJ* 207, 484
- Woodward P.R. (1978): *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 16, 555
- Zeldovich Y.B. (1970): *AA* 5, 84
- Zeldovich Y.B. (1972): *MNRAS* 160, 1
- Zeldovich Y.B. (1982): *Sov. Astr.* 26, 389
- Zeldovich Y.B. (1984): *Sov. Sci. Rev. E Astrophys., Space Phys.* Vol. 3, 1–34
- Zeldovich Y.B., Novikov I.D. (1983): *The structure and evolution of the universe, Relativistic Astrophysics Vol. 2*, Univ. of Chicago Press, Chicago
- Zeldovich Y.B., Einasto J., Shandarin S.F. (1982): *Nature* 300, 407
- Zeldovich Y.B., Shandarin S.F. (1982a): *Sov. Astr. Lett.* 8, 67
- Zeldovich Y.B., Shandarin S.F. (1982b): *Sov. Astr. Lett.* 8, 139
- Zeldovich Y.B. et al. (1983): *Sov. Phys. Usp.* 26, 77
- Zentsova A.S., Chernin A.D. (1980): *Astrophysics* 16, 108

## LEBENS LAUF

Name: Günter Götz

Geboren am 11.11.1958 in Weiden

1965 — 1969 Besuch der Volksschule in Weiden

1969 — 1978 Besuch des Kepler-Gymnasiums in Weiden

1978 Abitur

1978 — 1984 Studium der Physik und Astronomie an der LMU München

1984 Diplom in Physik am MPI für Astrophysik

1984 — 1985 Teaching Assistant an der Clarkson University, Potsdam, NY

ab 1984 Doktorand am MPI für Astrophysik





